FTN - DPM - LAMA

Predmet: **Projektovanje proizvoda** CAD/**CAE**

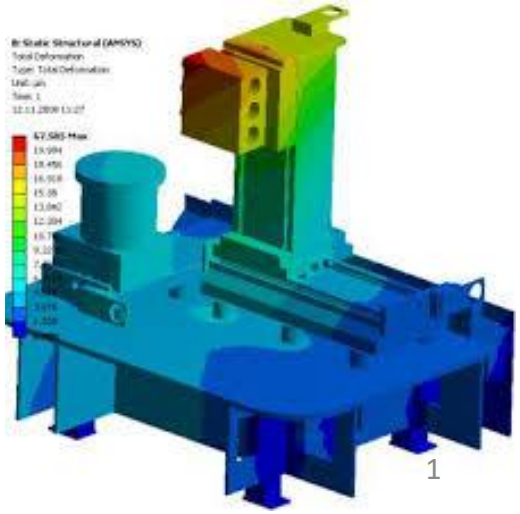
Novi Sad, NOVEMBAR 2020.



1. UVODNE NAPOMENE

Semestar: I MSS
Fond časova: 2+2
Izvođači nastave:
Predavanja: dr Aleksandar **ŽIVKOVIĆ**, red. profesor
dr Aco **Antić**, red. profesor

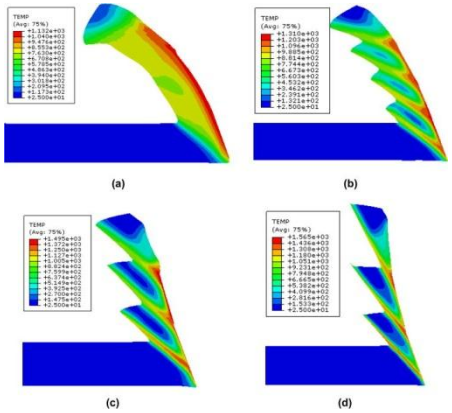
Vežbe: dr Miloš Knežev, docent

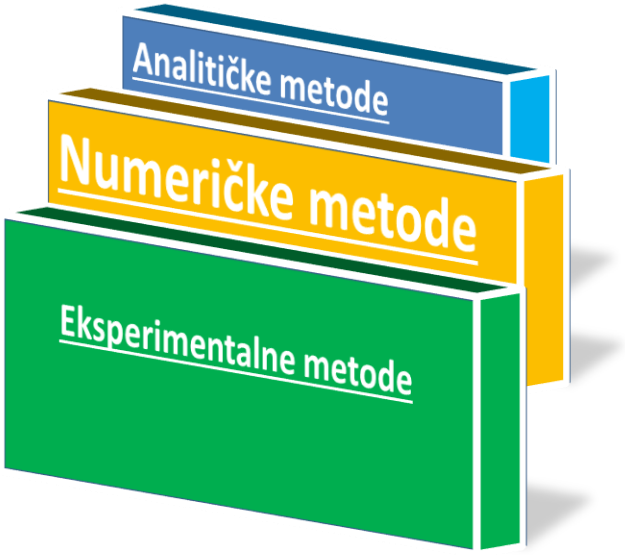


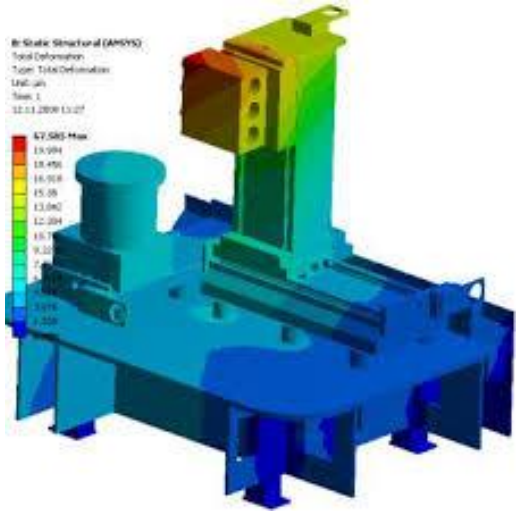
Autorizovani materijal za predavanja – Zabranjeno je štampanje i umnožavanje



1. UVODNE NAPOMENE



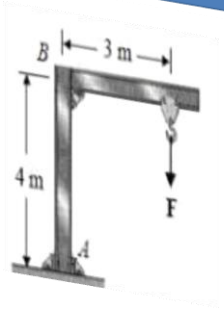




Inženjersko rešavanje problema

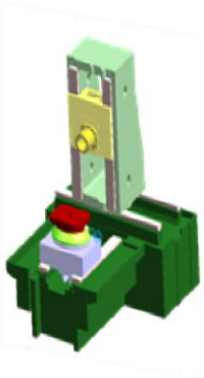
Analitička metoda

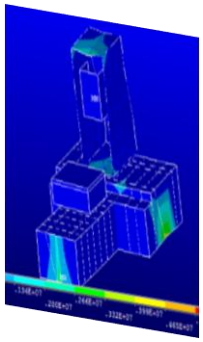
- Klasična metoda – tačnost rezultata 100%.
- Rešenja zatvorenog oblika.
- Primenljiva samo na jedostavne probleme: konzola, greda i dr.



Numeričke metode

- Matematičko predstavljanje problema.
- Rešenja se zasnivaju na približnim predpostavkama.
- Rezultati se moraju proveriti eksperimentalnim i/ili analitičkim metodama.
- MKE, MGE, MKZ, MKR (FEM), (BEM), (FVM), (FDM)



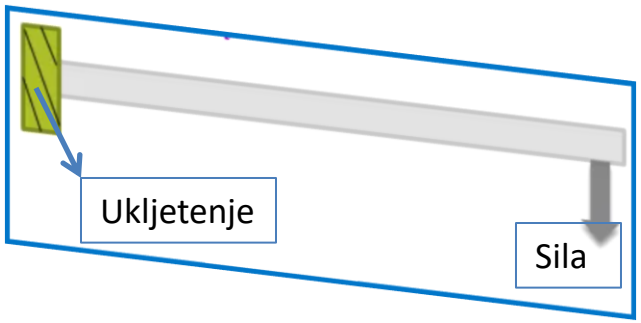


Eksperimentalne metode

- Merenje u realnim uslovima.
- Dugotrajno vreme, skupa postavka.
- Primenljivo samo na fizičkim prototipovima.
- Rezulati se moraju proveravati na više fizičkih prototipova.
- Merne trake, akcelerometri, senzori temperature, pritiska itd.



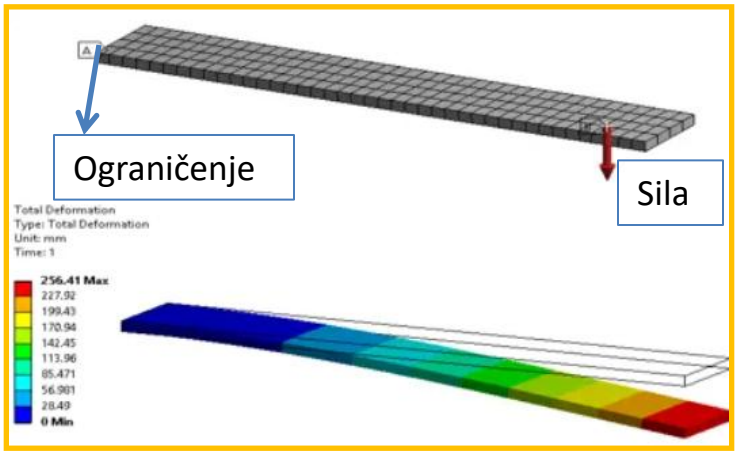
Inženjersko rešavanje problema



$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

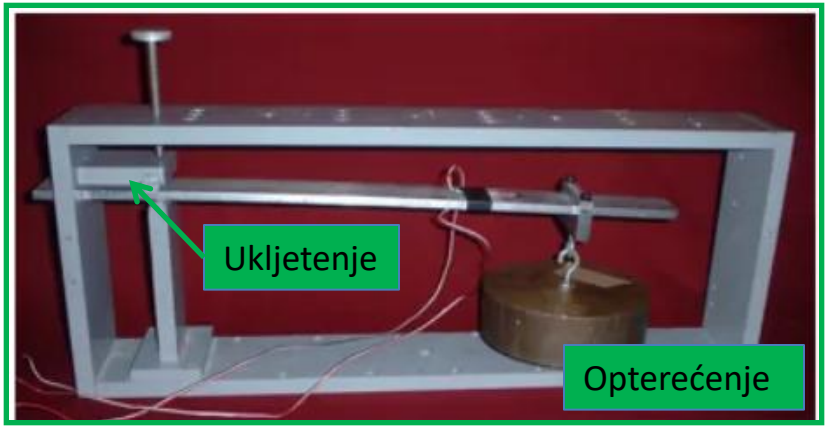
Analitičke metode

Rezultat – pomeranje vrha konzole na mestu dejstva sile.



Numeričke metode

Rezultat – pomeranje konzole u tačkama (čvorovima).

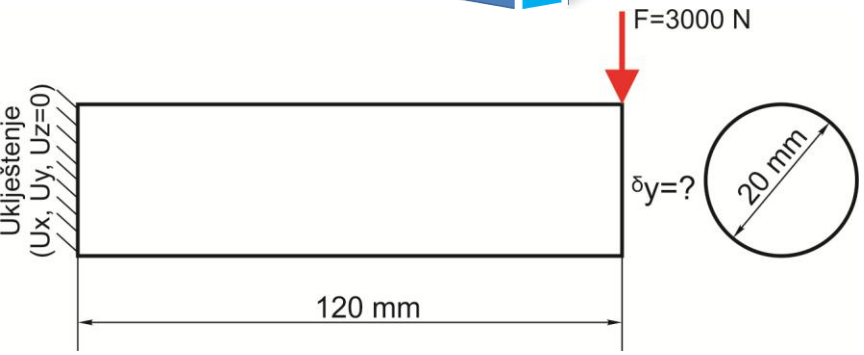


Eksperimentalne metode

Rezultat – pomeranje konzole na mestu postavljanja odgovorajućeg davača pomeraja.

Inženjersko rešavanje problema

Analitičke metode



$L = 120mm;\ F = 3000\,N;\ E = 190000\,N$

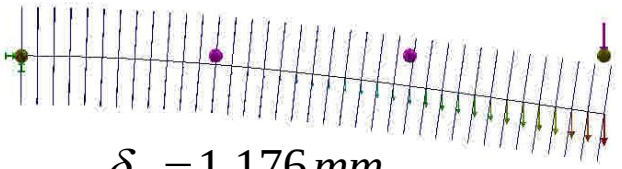
$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I};$$

$$I = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{20^4\pi}{64} = 7850\,kgmm^2$$

$$\delta_y = \frac{3000 \cdot 120^3}{3 \cdot 190000 \cdot 7850} = 1.158\,mm;$$

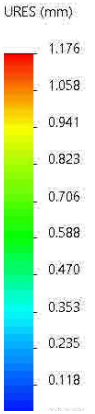
Numeričke metode

1-D elementi

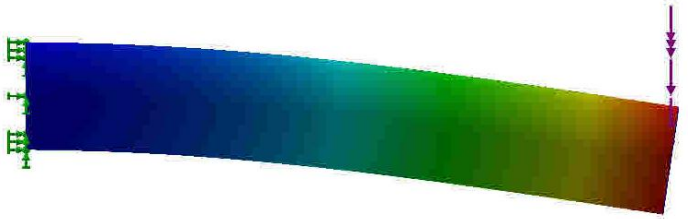


$\delta_y = 1.176\,mm$

$Greška = -1.55\%$



3-D elementi



$\delta_y = 1.173\,mm$

$Greška = -1.29\%$



$$Greška = \frac{\delta_{an.} - \delta_{MKE}}{\delta_{an.}} \cdot 100\%$$

Tipovi numeričkih metoda



Metoda Konačnih Razlika (MKR) - *Finite Difference Method (FDM)*

Koristi Tejlorov red za pretvaranje diferencijalne jednačine u algebarsku jednačinu, pri čemu se zanemaruju članovi višeg reda.
Upotrebljava se u kombinaciji sa MGE i MKZ za rešavanje toplotnih pojava i problema vezanih u mehanici fluida.

Metoda Konačnih Zapremina (MKZ) - *Finite Volume Method (FVM)*

Osnovna ideja metoda konačnih razlika je da se parcijalni izvodi u parcijalnim diferencijalnim jednačinama izračunavaju nad diskretnim zapreminama definisane geometrije.
Osnovna primena je u mehanici fluida i elektromagnetnoj analizi.

Metoda Graničnih Elemenata (MGE) - *Boundary Element Method (BEM)*

Postupak se sastoji u diskretizovanju granične oblasti strukture, graničnim elementima. Metoda se zasniva na rešavanju linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje su formulisane kao integralne jednačine.
Primena: mehanika fluida, akustika, eklektromagnetika, mehanika loma i mehanika kontakta.

Metoda Konačnih Elemenata (MKE) - *Finite Element Method (FEM)*

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. Osnovne jednačine kojima se opisuje stanje u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini, umesto diferencijalnih ili integralnih, obične algebarske.

MKE u razvojnom ciklusu proizvoda

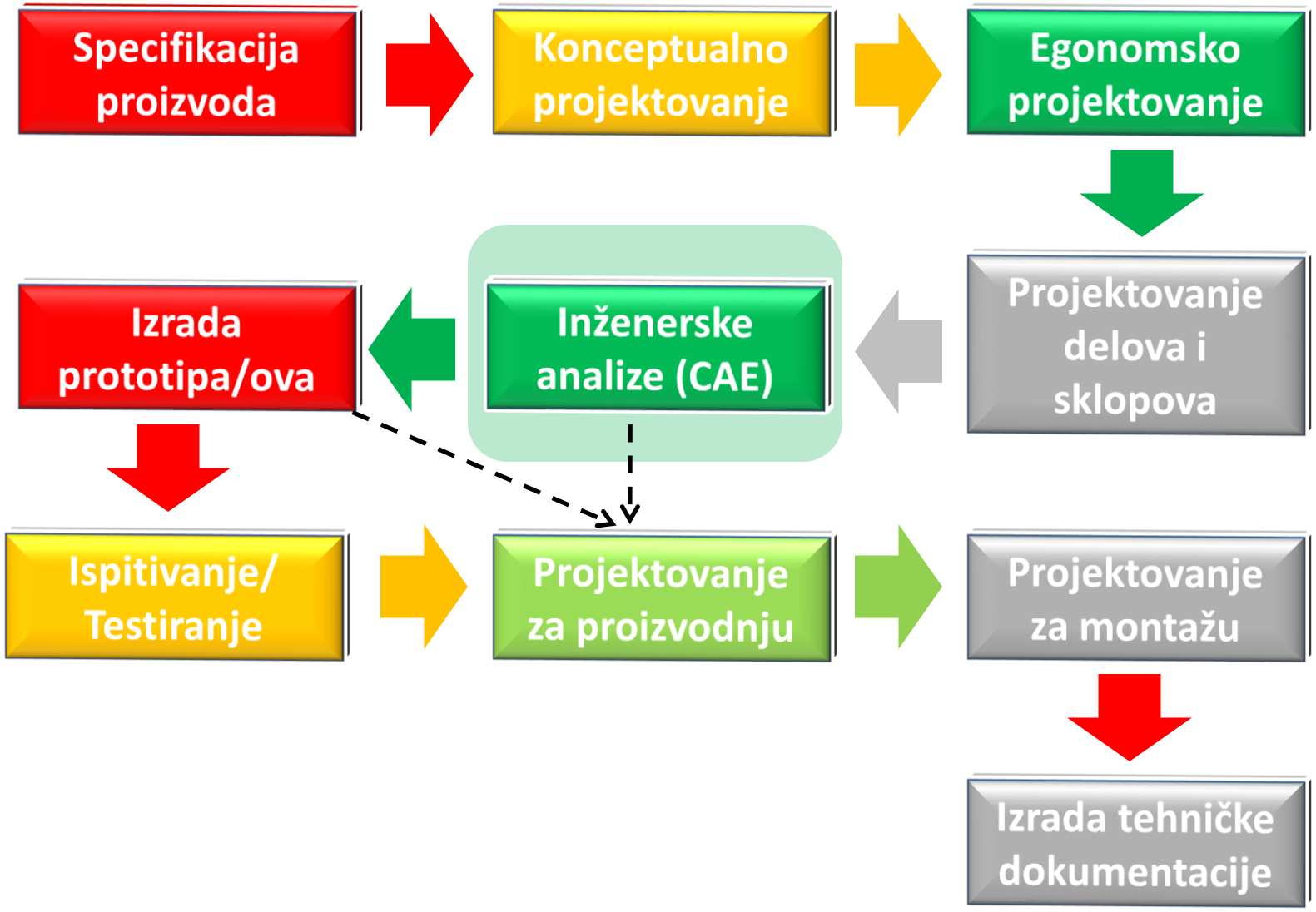


- Prepoznavanje potreba
- Definisanje problema
- Geometrijsko modeliranje
- Analiza i optimizacija
- Procena proizvoda
- Tehnička dokumentacija
- Proizvodnja

❖ Inženjerska analiza (MKE)

❖ Pregled projektovanja i vrednovanje rešenja

MKE u razvojnom ciklusu proizvoda



Metoda konačnih elemenata - UVOD

Šta je MKE??

Metoda konačnih elemenata se zasniva na fizičkoj diskretizaciji posmatranog domena na konačan broj manjih područja odnosno elemenata, tako da se analizom pojedinih elemenata, uz pretpostavku o njihovoj međusobnoj povezanosti, analizira celina.

M

Metoda – Postoje tri metode za rešavanje bilo kojeg inženjerskog problema. Analiza konačnim elementima pripada numeričkoj (računarskoj) metodi.

K

Konačnih – Svaki kontinualni (neprekidan) objekat ima beskonačan broj stepeni slobode (neodređen sistem) i kao takav nije moguće rešiti. Broj stepeni slobode se svodi sa beskonačnog na ***konačni.***

E

Elemenata – Osnovni koncept podrazumeva deljenje predmeta koji se analizira na konačan broj delova (poddomena) koji se nazivaju elementi.

Za šta se koristi MKE??

Metoda konačnih elemenata se koristi za dobijanje približnih rešenja za date **g**ranične **u**slove (GU).



Linearni sistem jednačina se rešava korišćenjem računara (npr. Gausov metod eliminacija, Njutn – Rapsonova metoda, itd).

Prednosti MKE

- Mogućnost analize složenih geometrijskih oblika (delova, sklopova itd).
- Definisanje opštih opterećenja i graničnih uslova.
- Model se lako redefiniše da bi se povećala tačnost rezultata promenom veličine i tipa konačnih elemenata.
- Moguće definisanje vremenskih zavisnosti i uključivanje dinamičkih uticaja.
- Mogu se uključiti različiti nelinearni efekti, koji se uvode ponašanje materijala, velikih deformacija, graničnih uslova, itd.

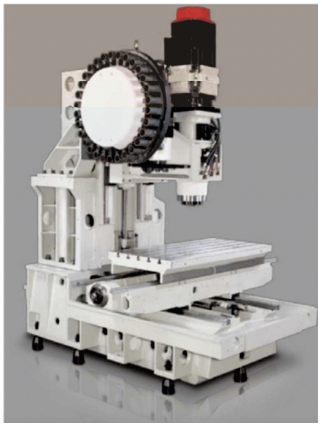


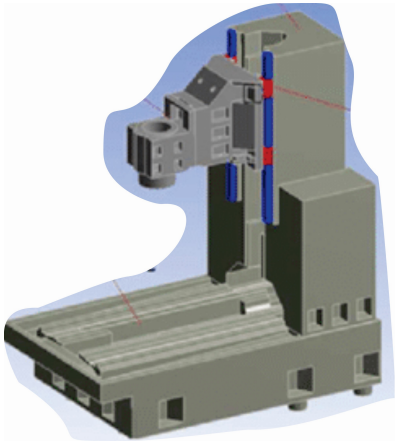
Prednosti MKE

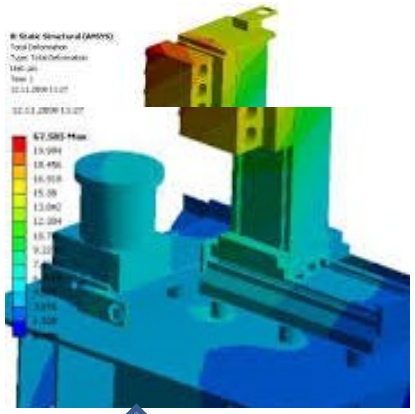
- Smanjenje vremena potrebnog za projektovanje i razvoj.
- Optimizacija performansi i troškova proizvoda.
- Eliminisanje ili smanjenje eksperimentalnog ispitivanja.
- Poboljšana sigurnost sa željenim faktorom sigurnosti.
- Potpunije razumevanje komponenata koje omogućavaju racionalnije projektovanje.
- Vizuelizacija uvida u objekte (Mogućnost vizuealizacije unutrašnjeg ponašanja proizvoda za primenjeno opterećenje).



2. Faze proračuna u MKE

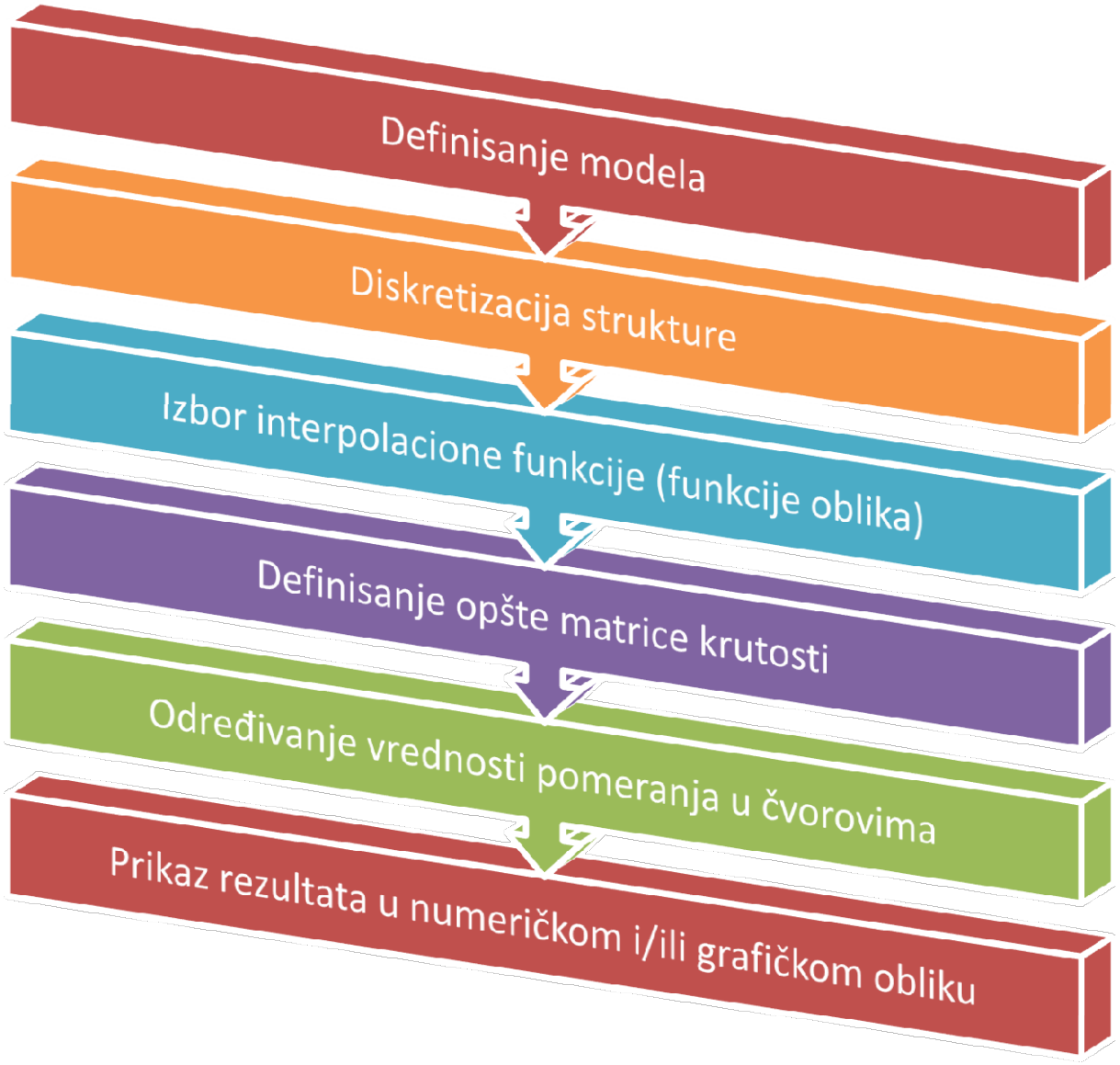






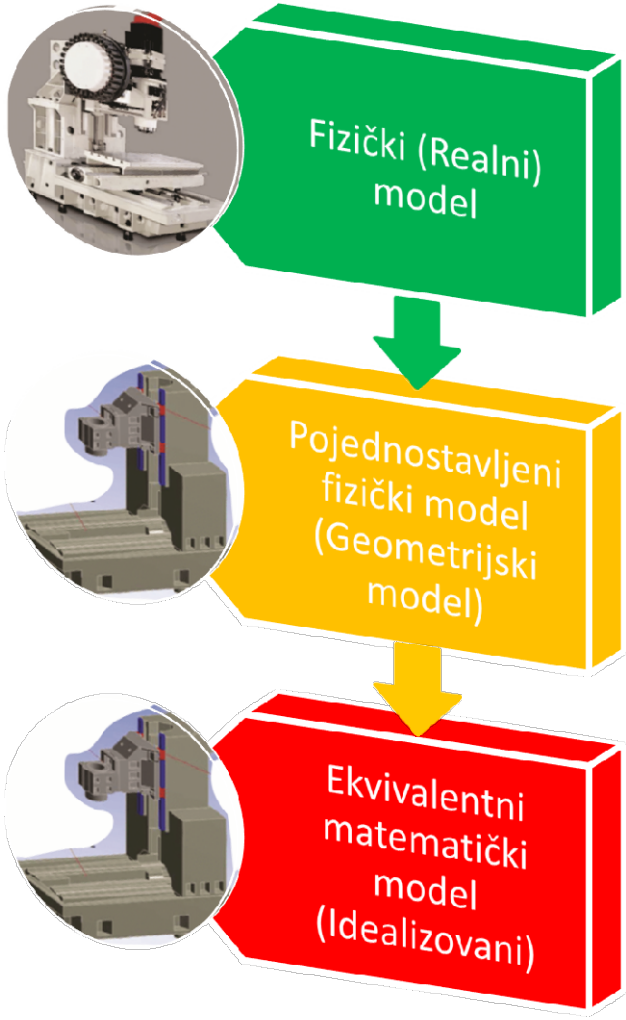
Faze proračuna u MKE

Analiza primenom metode konačnih elemenata se odvija u nekoliko faza:



Faze proračuna u MKE

1. Definisanje modela



Formiranje modela za proračun je pripremna faza pre analize metodom konačnih elemenata. U procesu definisanja modela potrebno je preslikati geometrijske karakteristike fizičkog u matematički model.

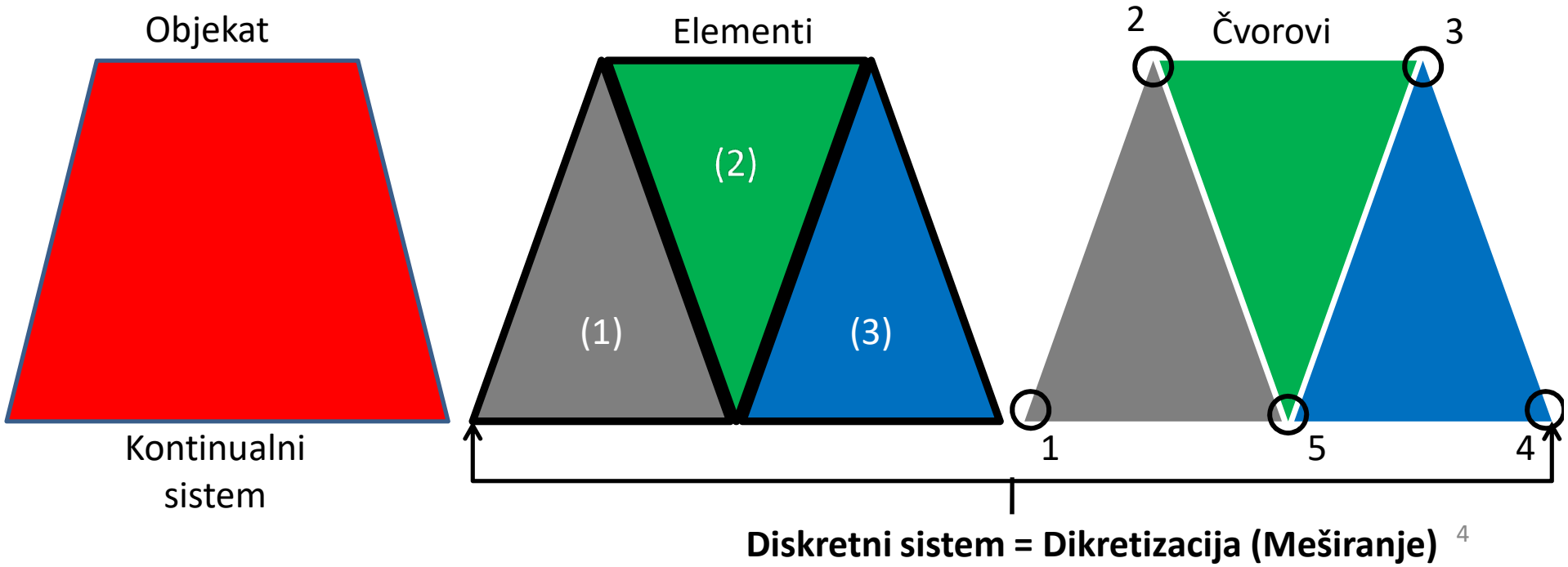
Geometrijski model definiše projektant u nekom od CAD programskih sistema. . Geometrijski model može da sadrži geometrijske elemente koji nemaju značaja za analizu jer ne utiču na naponsko-deformacionu sliku relanog sistema koji se analizira.

Idealizovan model je uprošćen model koji ne mora da predstavlja celinu realnog sistema. Idealizacija je sagledavanje realnog sistema od strane korisnika kojom se postavlja koncept modela, uklanjaju nepotrebni detalji za analizu, prepoznaje simetrija, redukuje model

Faze proračuna u MKE

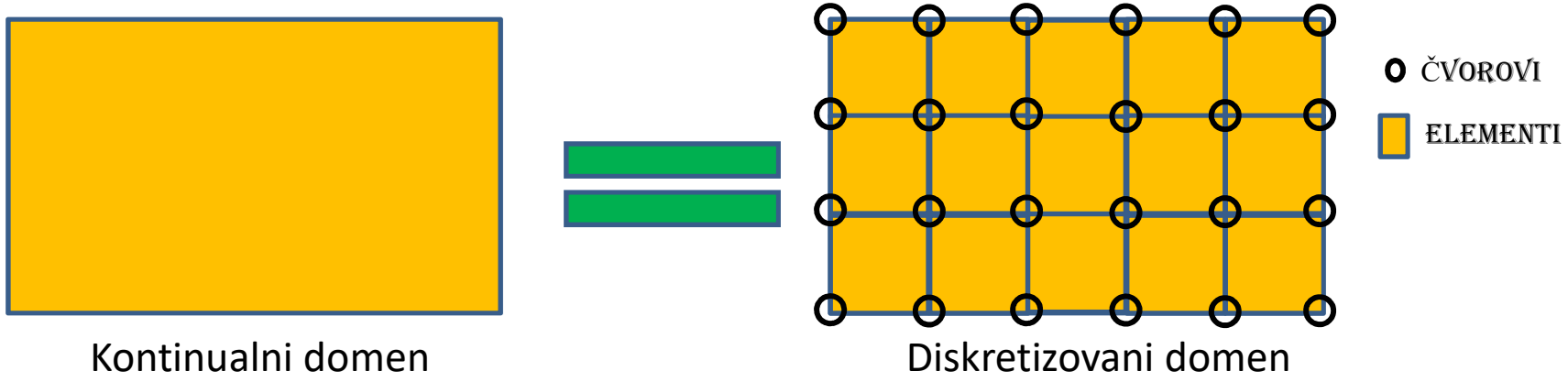
2. Diskretizacija modela

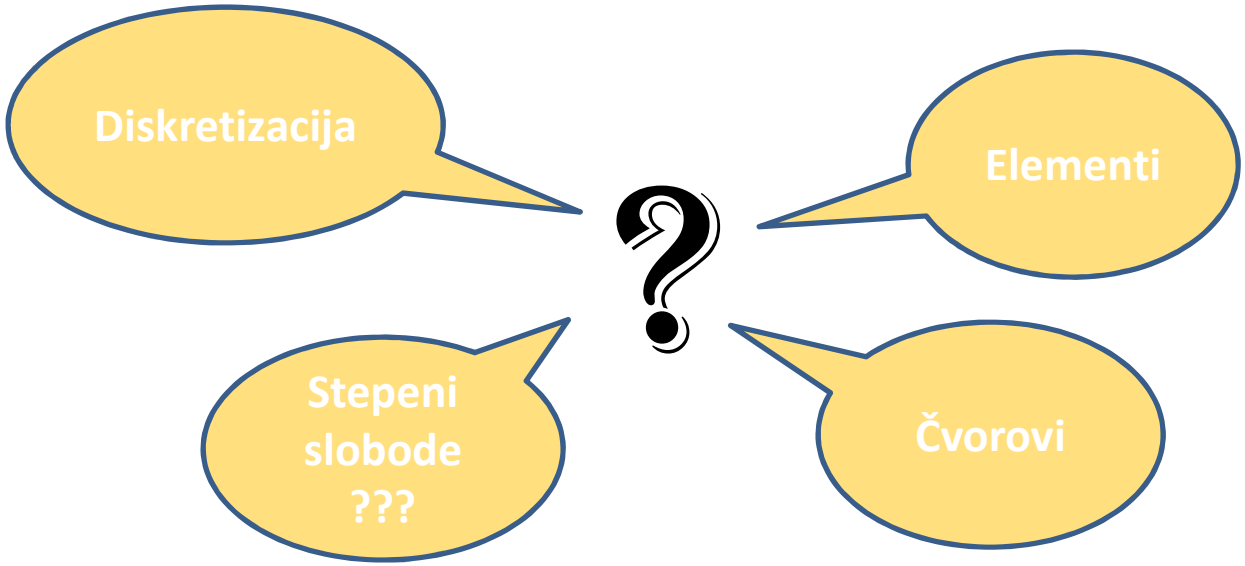
- Modeliranje tela deljenjem na ekvivalentni sistem konačnih elemenata, međusobno povezanih na konačnom broju tačaka (čvorova).
- Kontinualna elastična struktura (domen) se deli na male definisanje podstrukture (podomene), koji se nazivaju **elementima**. Elementi su međusobno povezani u **čvorovima.** Čvorovi imaju **stepene slobode**.
- Diskretizacija je proces poznat pod nazivom meširanje.



Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela



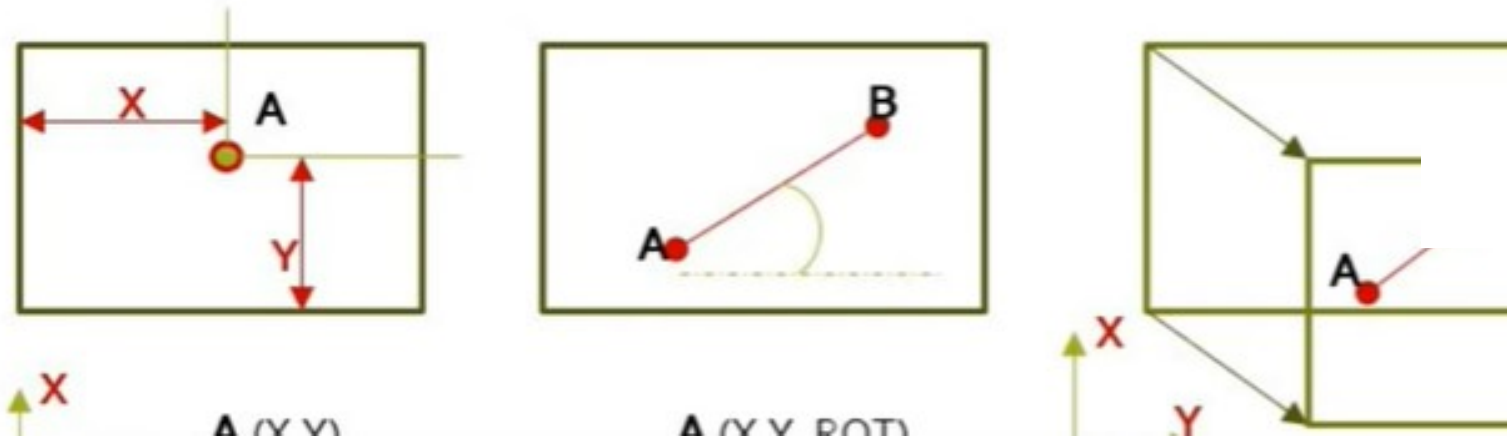


Analiza sistema spregnutih konačnih elemenata, dobijenih **diskretizacijom kontinualne strukture**, omogućava numeričku simulaciju, odziva strukture na zadate pobude.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode

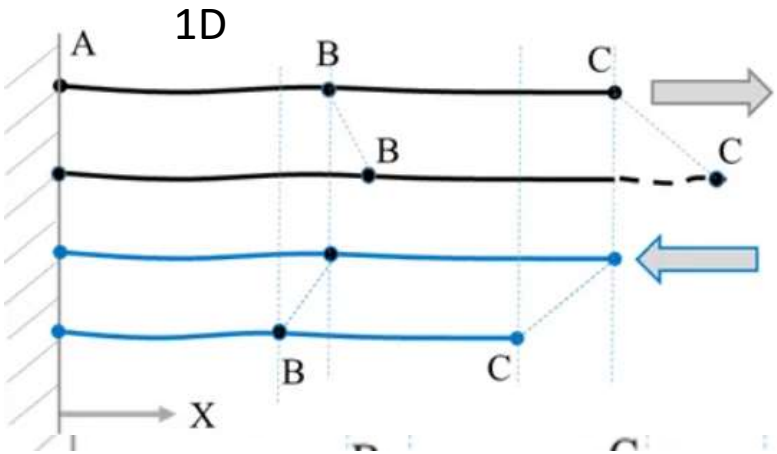
- **Broj stepeni slobode** se može definisati kao minimalni broj nezavisnih parametar (koordinata, kretanja, temperatura, itd) koje u potpunosti određuju položaj sistema u prostoru.
- U analizi MKE stepeni slobode imaju veliki značaj, zbog činjenice da rešenje simulacije (vreme) zavisi od broja stepeni slobode sistema koji se analizira.
- Pozicija krutog tela u prostoru je definisana sa tri komponente **translacije** i tri komponente **rotacije,** što znači da **ima šest stepeni slobode**.



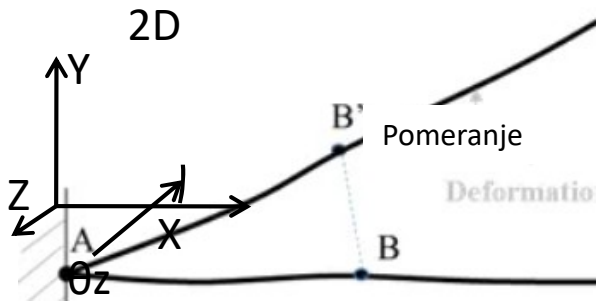
- **Broj stepeni slobode** zavisi od tipa konačnog elementa (1D, 2D, 3D), familije elementa (ljuska, ploča, greda itd) i tipa analize.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode



1D prostor se sastoji od samo 1 dimenzije i stoga su matrice male što rezultira bržim rešenjem problema.
U slučaju 1D prostora, samo 1 dimenzija odnosno jedan stepen slobode je dovoljan da definiše položaj.

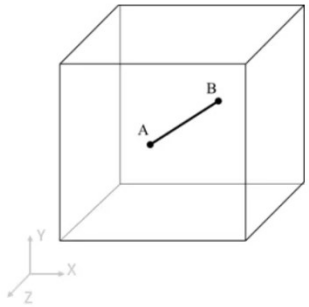


Kod 2D problema položaj tačke C i B je u potpunosti određen koordinatama X, Y i θz.
U ovom slučaju je u pitanju tri stepena slobode (dve translacije + jedna rotacija)

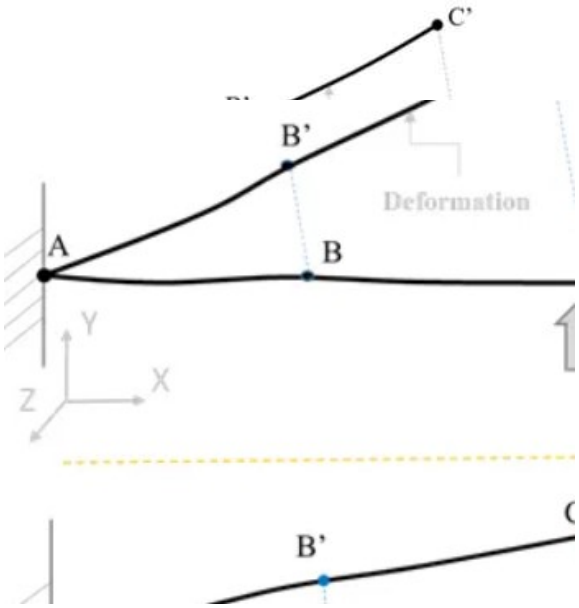
Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Stepeni slobode

3D



Da bi se definisao položaj tačke A ili bilo koje tačke na liniji AB, minimalni broj parametara iznosi 6 (tri translacije (Ux, Uy, Uz) i tri rotacije (Rx, Ry, Rz))

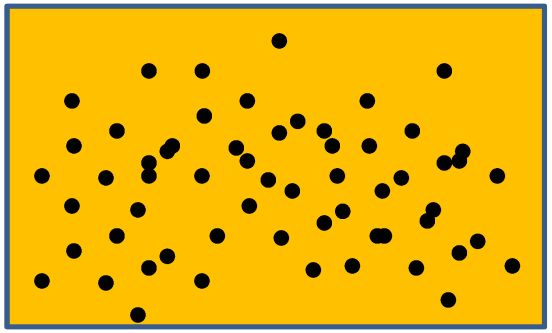


- Ukupan broj stepeni slobode za dikretizovani model, jednak je ukupnom broju čvorova pomnoženim sa brojem stepeni slobode po čvoru.

Faze proračuna u MKE

2. Diskretizacija modela – Čvorovi i Elementi

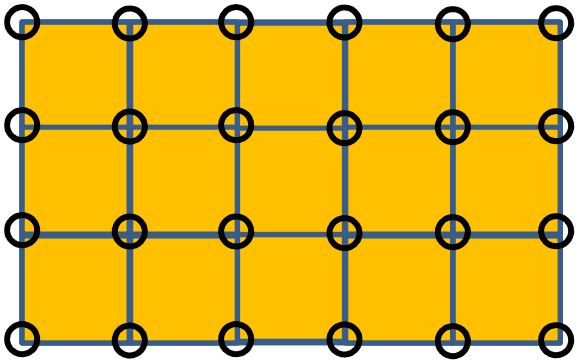
Fizičke veličine koje su obuhvaćene modelom dobijaju se u diskretnom obliku, tj. u ***čvorovima koje proizilaze iz diskretizacije***.



Broj tačaka (No.)= **∞**

Br. Stpeni slobode po tački (NoS) = **6** (za 3D problem)

Ukupan br. jed. za rešavanje = **No * NoS = ∞ * 6 = ∞**



Broj čvorova (No.)= **24**

Br. Stpeni slobode po tački (NoS) = **6** (za 3D problem)

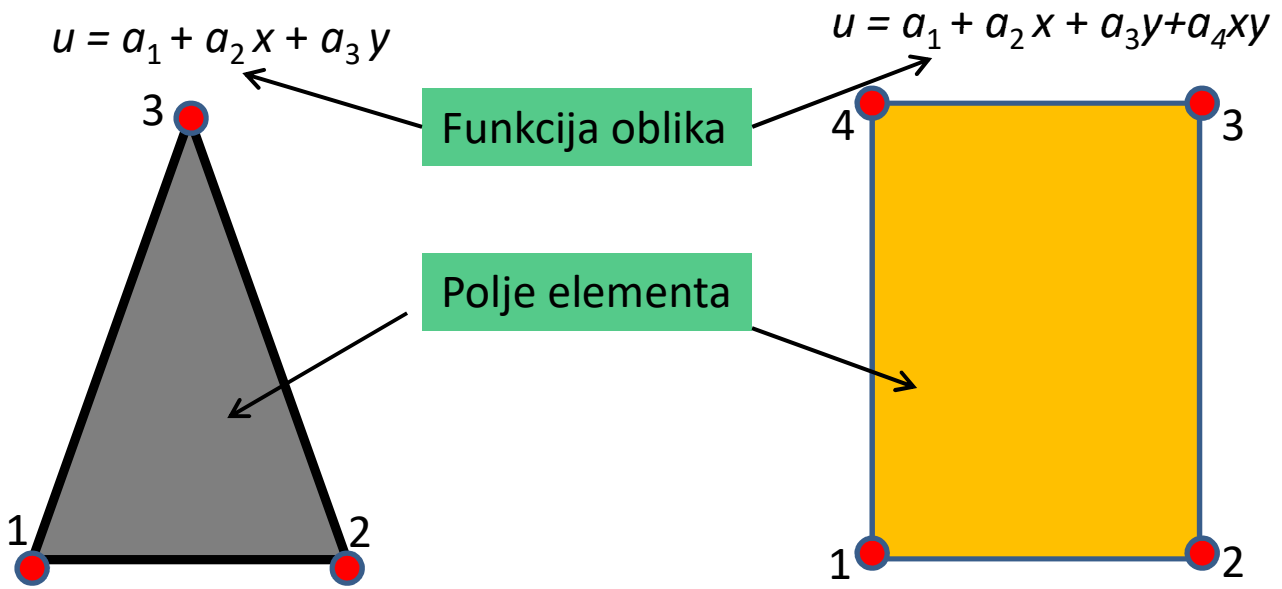
Ukupan br. jed. za rešavanje = **No * NoS = 24 * 6 = 144**

- Metoda konačnih elemenata vrši proračun u ograničenom broju tačaka, a zatim interpolira rezultate za celi domen (površini i/ili) zapreminu.

Faze proračuna u MKE

3. Interpolacione funkcije (Funkcije oblika)

- Interpolacione funkcije se koriste za izračunavanje vrednosti polja promenljivih veličina (Ux, Uy...itd) između čvorova u okviru elemenata.
- Interpolacione funkcije definiše polje promenjivih u svakom konačnom elementu.
- Kao interpolacije funkcije u metodi konačnih elementa se koriste polinomi i to: ***linearni, kvadratni i kubni.***



Konačni element oblika trougla

Konačni element oblika pravougaonika

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti u MKE

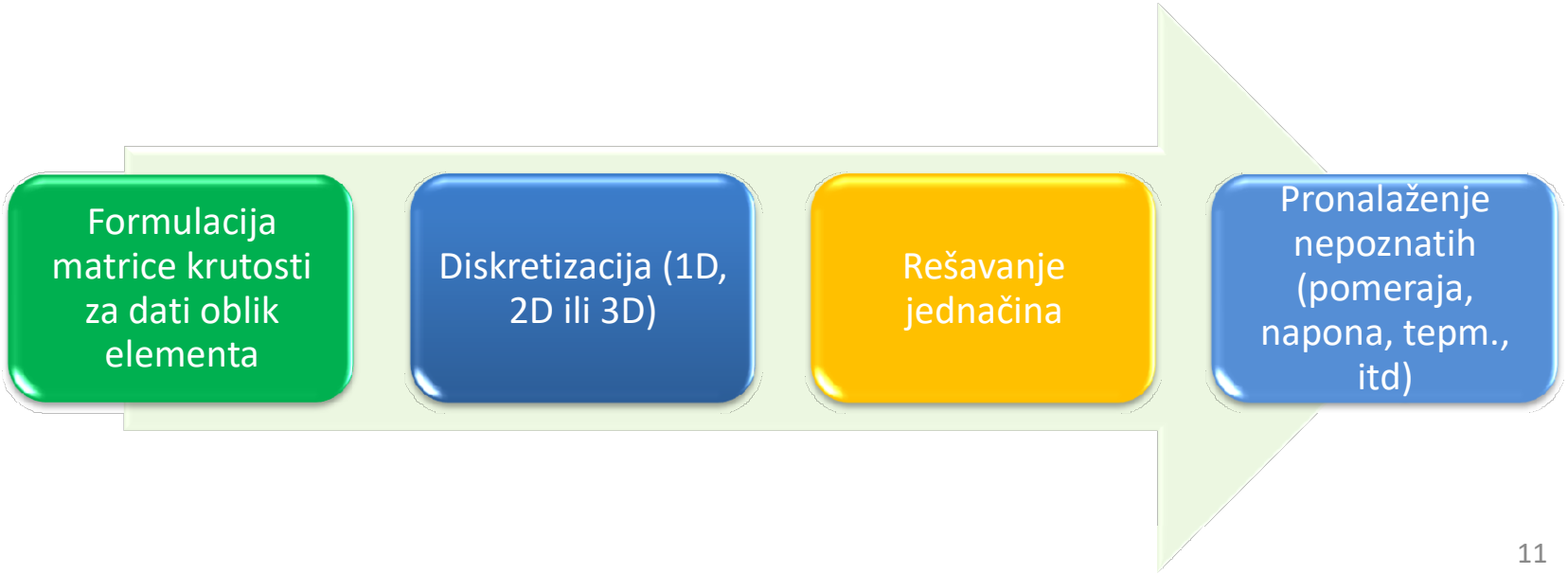
- Jednačina linearne statičke analize:

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

Sila – akcija (Poznata veličina)

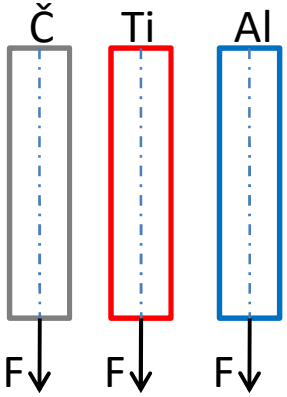
Krutost – svojstvo sistema (Poznata veličina)

Pomeranje – ponašanje sistema (Nepoznata veličina)



Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti u MKE



K = AE/L;
Ač = Ati = Aal;
Lč = Lti =Lal;
Kč > Kti >Kal

- Krutost je definisana kao **SILA/POMERANJE** u N/mm.
- Krutost je jednaka **sili** koja je potrebna da se proizvede **jedinično pomeranje.**
- Krutost zavisi od geometrije kao i od mehaničkih svojstava materijala.

Metode za definisanje matrice krutosti:

1. Direktni ravnotežni metod (Direct Finite Element Model),
2. Varijaciona metoda (Variational Finite Element Model)
3. Metode težinskih ostatka (Methods of Weighted Residuals)

Direktni metod je lak za razumevanje ali veoma težak za programiranje, dok su Varijaciona metoda i Metoda težinskih ostataka veoma teške za razumevanje, ali lake za programiranje.

Usled ovoga razloga svi programski sistemi koji se koriste za MKE analizu koriste zadnje dve metode za formulaciju matrice krutosti

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Konačni elementi tipa ŠTAPA
Direktan metod – Primer



- $\sigma_x = F/A;$ $\varepsilon = u/L$
- $\sigma_x = \varepsilon * E;$ $F/A = Eu/L;$ $F = AE/L * u$
- $\Sigma Fx = 0;$ $F_i + F_j = 0;$ $F_i = -F_j$
- *Slučaj 1,* $u_i > 0;\ u_j = 0$

  $F_i = (AE/L) * u_i;$ $F_j = -F_i = -(AE/L) * u_i$
- *Slučaj 2,* $u_i = 0;\ u_j > 0$

  $F_j = (AE/L) * u_j;$ $F_i = -F_j = -(AE/L) * u_j$

Iz Slučaja 1 i Slučaja 2

$F_i = (AE/L) * u_i - (AE/L) * u_j;$

$F_j = -(AE/L) * u_i + (AE/L) * u_j;$

$$[k]\{u\} = \{f\}$$

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

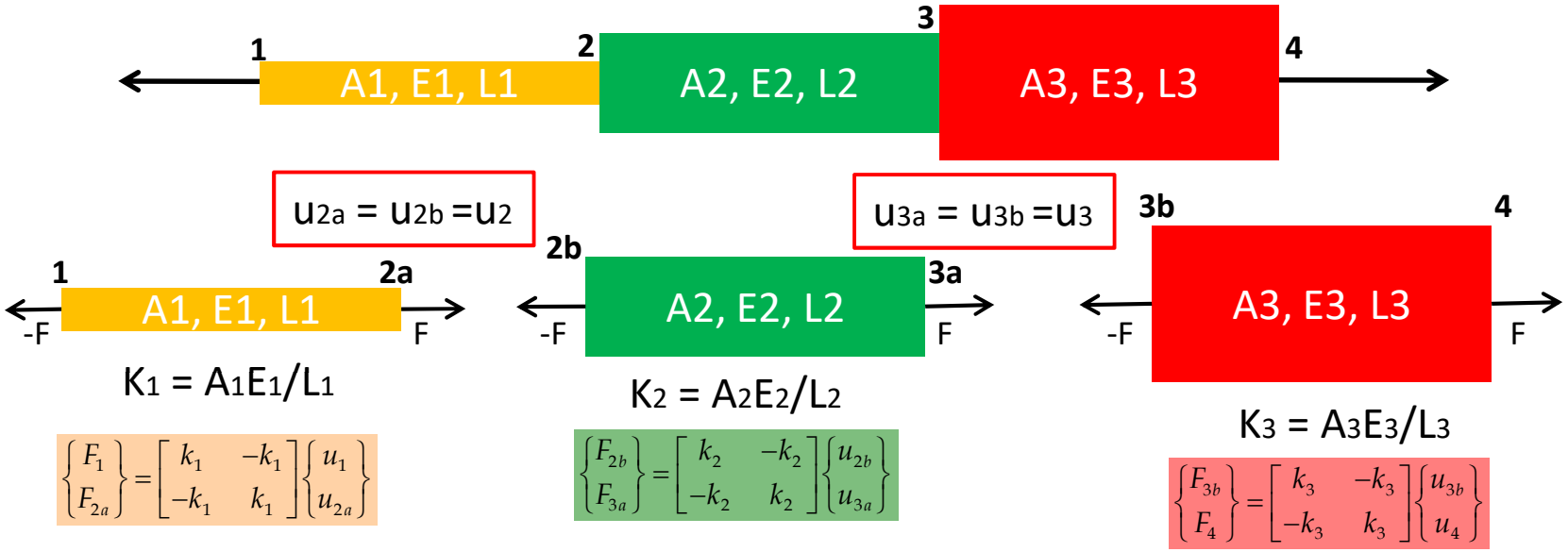
$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{(2x2)} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Vektor sila | Matrica krutosti | Vektor pomeraja

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti

Primer – tri konačna elementa oblika štaša



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2a} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2b} \\ F_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2b} \\ u_{3a} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3b} \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \sum_k [k_n]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

1 element

2 element

3 element

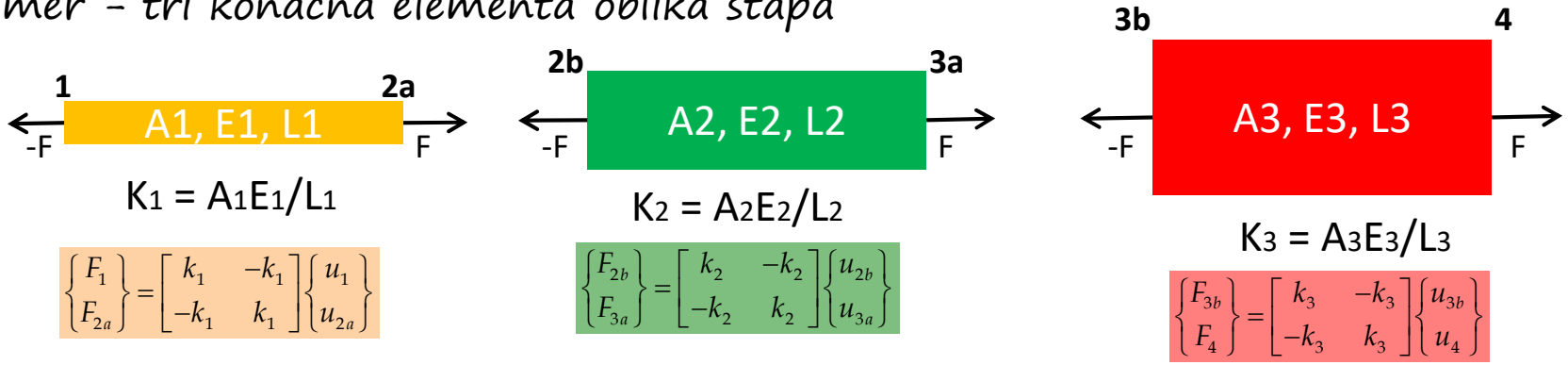
$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} - F_{2b} \\ F_{3a} - F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti

Primer – tri konačna elementa oblika štapa



$K_1 = A_1E_1/L_1$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2a} \end{Bmatrix}$$

$K_2 = A_2E_2/L_2$

$$\begin{Bmatrix} F_{2b} \\ F_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2b} \\ u_{3a} \end{Bmatrix}$$

$K_3 = A_3E_3/L_3$

$$\begin{Bmatrix} F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3b} \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ \hline 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ \hline 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{array}\right]$$

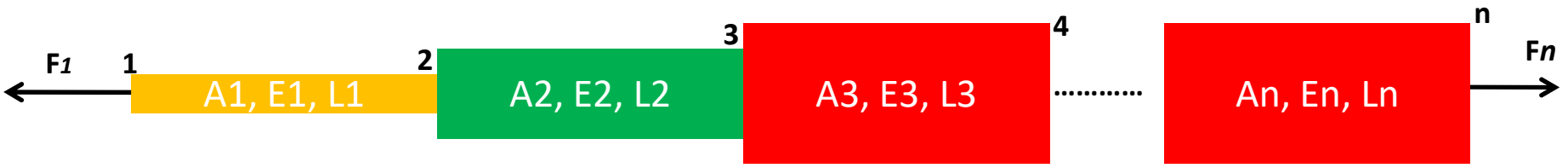
Za $u_1 = 0$ i $u_{2a} = u_{2b} = u_2$ $u_{3a} = u_{3b} = u_3$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2a} - F_{2b} \\ F_{3a} - F_{3b} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ \hline 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

Faze proračuna u MKE

4. Matrica krutosti – Ukupna matrica krutosti



Matrične jednačine celokupnog sistema u kojoj su definisani granični uslovi predstavljaju spregnuti sistem algebarskih jednačina u obliku:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots\dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots\dots & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots\dots & K_{nm} \end{bmatrix}^{-1}$$

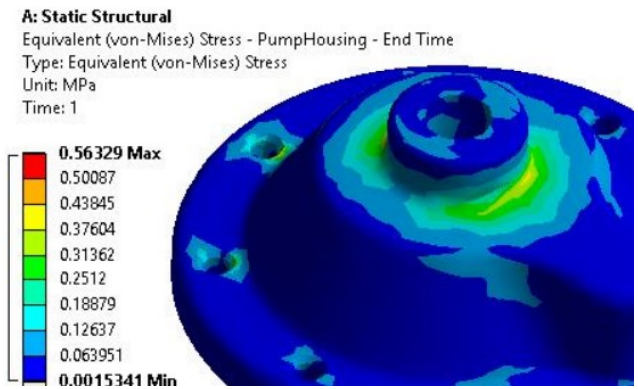
gde je ***n - ukupan broj nepoznatih stepeni slobode razmatranog problema***.

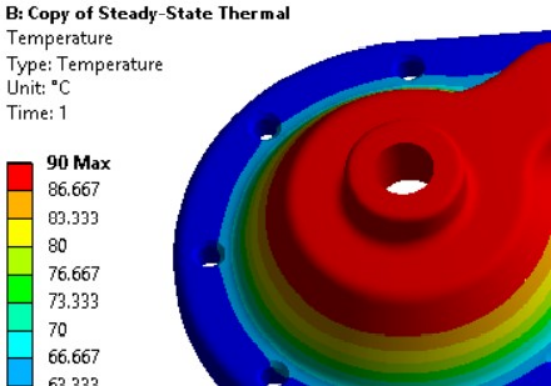
Faze proračuna u MKE

5. Prikaz rezultata proračuna

- Dobijeni rezultati primenom metode konačnih elemenata se dalje analizuraju i interpretiraju.
- Zaključak svake analize se svodi na određivanje pomeranja, deformacija, napona, sopstvenih frekvencija, temperatura, toplotnog fluksa itd.
- Današnji programski sistemi bazirani na metodi konačnih elemenata poseduju postprocesore koji omogućavaju interpretaciju rezulata u numeričkom i grafičkom obliku.

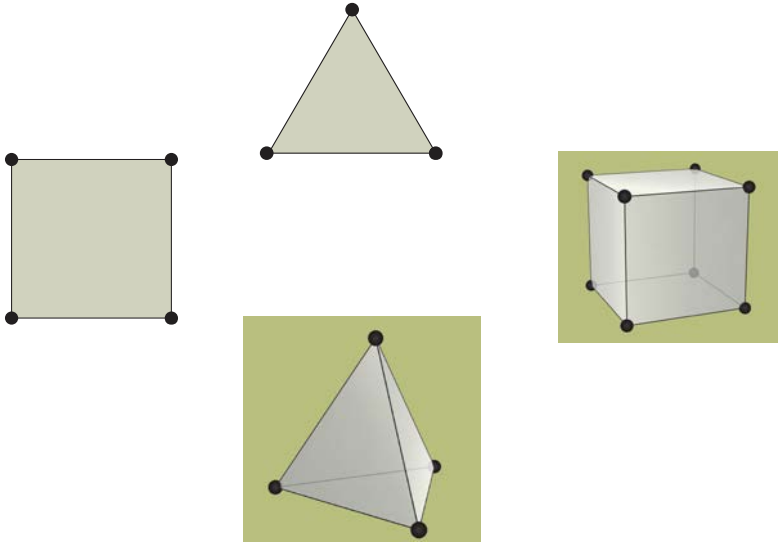








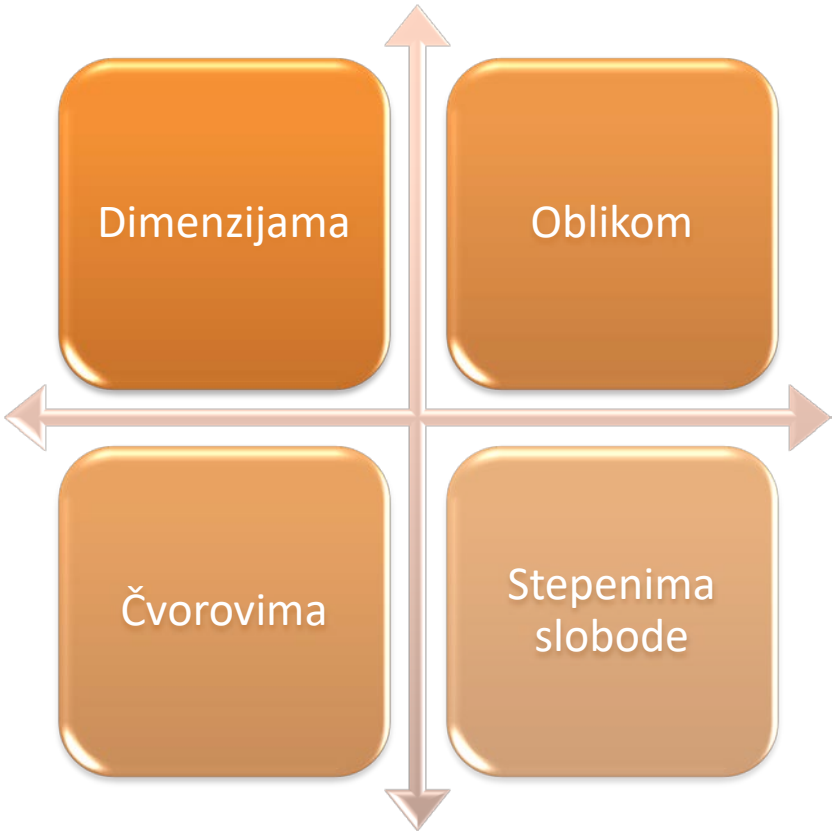
3. Tipovi konačnih elemenata



Tipovi konačnih elemenata

1. Podela konačnih elemenata

Postoje različite vrste i tipovi konačnih elemenata. Svaki konačni element je definisan:



Tipovi konačnih elemenata

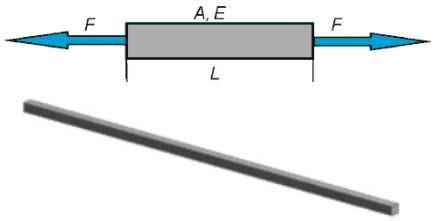
1. Podela konačnih elemenata

Osnovni tipovi konačnih elemenata su **određeni prostorom (geometrijskim dimenzijama) koji koriste**.

Tipovi elemenata

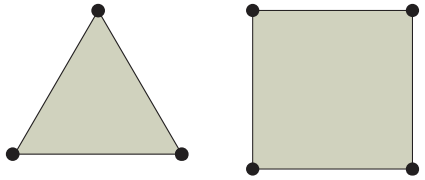
1D elementi

Oblik elementa: štap, greda, opruga, cevi, itd



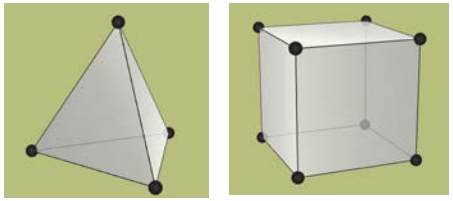
2D elementi

Oblik elementa: trgougao, četvorougao itd.



3D elementi

Oblik elementa: heksaed., tetraed., piramida, prizma, itd.



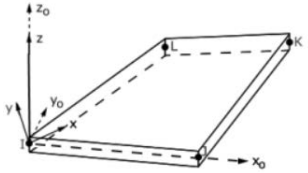
Tipovi konačnih elemenata

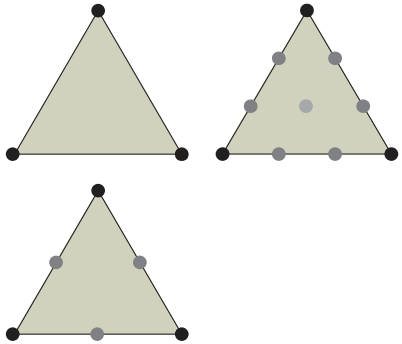
1. Podela konačnih elemenata

Konačne elemente je moguće klasifikovati i prema:

Familiji – grupaciji	Redu interpolacionih funkcija	Fizičkim osobinama	Svojstvima materijala
• (ljuska, ploča, greda),	• (linearan, paraboličan, kubni),	• tanka ljuska, debela ljuska	• izotropan, anizotropan







Tipovi konačnih elemenata

2. Podela konačnih elemenata

- Posebnu grupu elemenata čine vezivni ili granični elementi.
- Granični elementi su kategorija koja služi za formiranje veza na granicama kontinuma, koja matematičkom modelu definiše neki uslov ograničenja ili opterećenja.

Pojedini tipovi graničnih elemenata su:

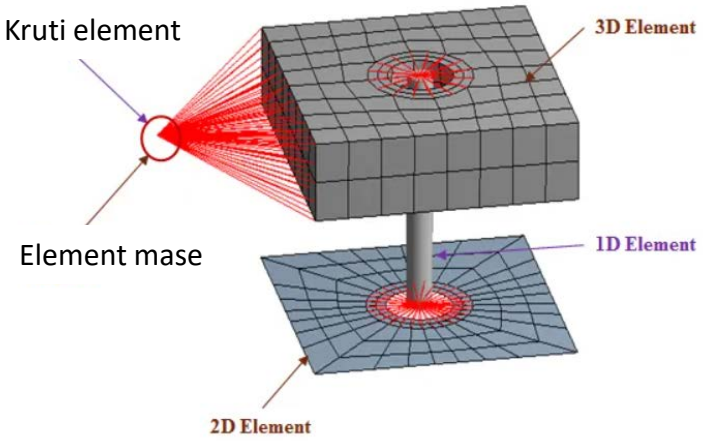
- Element za definisanje mase;
- Element za definisanje krutog tela;

→ Element tipa tačke

- Elementi za definisanje krutosti;
- Elementi za definisanje prigušenja;

→ Element tipa opruge

Ovi elementi se primarno ne koriste za definisanje geometrije modela, već za definisanje veza između elemenata na modelu, komponenti mase itd.



Tipovi konačnih elemenata

2. Jednodimenzionalni konačni elementi

- U slučaju 1D elemenata, jedna od dimenzija je veoma velika u poređenju sa druge dve dimenzije.
- Jednodimenzioni konačni elementi se mogu podeliti na: ***štapove, grede, granične elementi, cevne elementi, osno-simetrične ljuske itd***.
- Dužina se definiše modelovanjem linije, dok se druge dimenzije definišu dodeljivanjem odgovarajućih preseka liniji.
- **Primena:** dugačka vratila, spojevi u zglobovima sa jednom osom rotacije, vezivni elementi.

Prednosti:

- Brži proračun;
- Lakše modeliranje i povezivanje;
- Jednostavno je napraviti promene na modelu;
- Pogodni za automatizaciju proračuna.

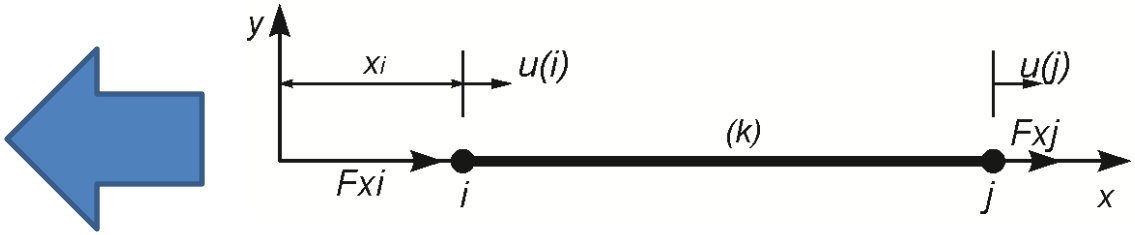


Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi tipa štapa

- Konačni element tipa štapa ima **dva čvora i po jedna stepen slobode u svakom čvoru.**
- Elementi tipa ***štapa*** služi za određivanje naprezanje na zatezanje i/ili pritisak.
- Za slučaj konstante površine poprečnog preseka konačnog elementa oblika štapa po celoj dužini matrica krutosti ima oblik:

$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}$$

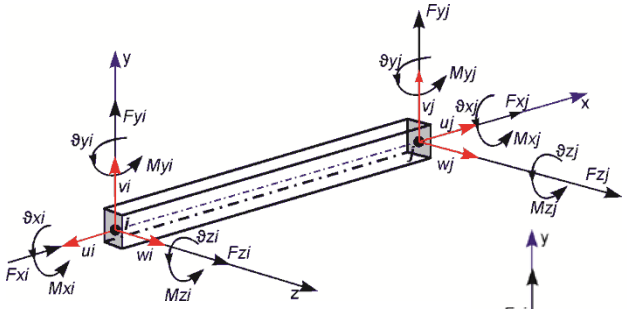


$$[k]_{(k)} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

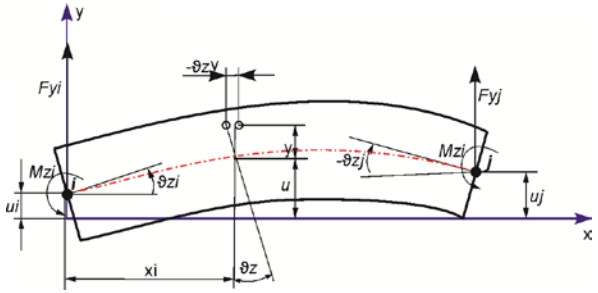
Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi tipa grede

- Konačni element tipa grede je element sa dva čvora (*i, j*). Element tipa grede može služiti za ravanske 2D analize, ali i za prostorne 3D analize na **naprezanje, zatezanje, pritisak, savijanje i uvijanje.** .
- Za slučaj analize u ***xy* ravni**, konačni element ima po **tri stepena slobode u svakom čvoru**. **Dve translacije u x i y pravcu** i **jednu rotaciju oko z ose**.
- Za prostorne 3D analize konačni element ima po **šest stepeni slobode u svakom čvoru**. **Tri translacije u x, y i z pravcu** i **tri rotaciju oko x, y i z ose**.
- Pogodni su za analize kada je odnos vitkosti elementa koji se analizira (GAL^2)/(EI) > 30.



Konačni element u obliku grede



Konačni element tipa grede za slučaj savijanja u xy ravni

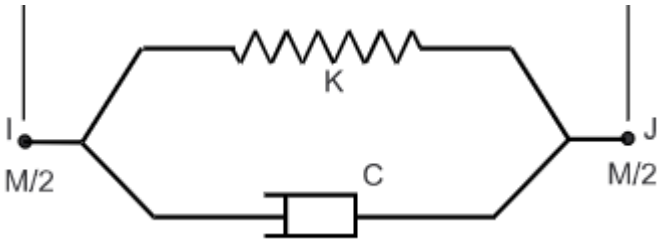
Matrica krutosti za slučaj savijanja u xy ravni

$$[k]_{(k)} = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ simetrično & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Tipovi konačnih elemenata

2. 1D konačni elementi – *Granični elementi tipa opruge*

- Konačni element tipa opruge **ima dva čvora na krajevima i po jedan stepen slobode u svakom čvoru.**
- Ne podržava analize na savijanje i uvijanje, dok se smatra da je sila konstantna po celom elementu.
- Pojedini elementi tipa opruge služe i za definisanje prigušenja pri dinamičkoj analizi.
- Može se koristiti za modeliranje hidrauličnih cilindara.
- Matrica krutosti je ista kao i kod elementa tipa štapa.

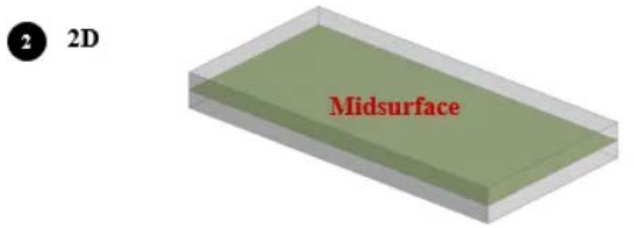


Konačni element tipa grede za slučaj savijanja u xy ravni

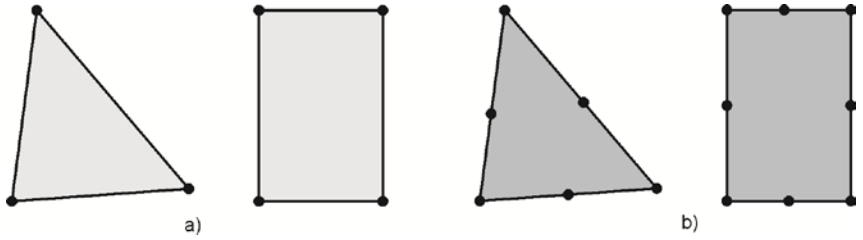
Tipovi konačnih elemenata

3. Dvodimenzionalni konačni elementi

- Kod 2D elemenata, dve dimenzije su veoma velike u poređenju sa trećom dimenzijom.
- Koriste se za analizu problema koji se mogu posmatrati kao dvodimenzionalni (***ravno stanje deformacije i napona, osnosimetrično stanje deformacije)***
- Dužina stranica se definiše modeliranjem, pri čemu se izvlači srednja površina i određuje debljina sa obe strane površine.
- Najčešće su oblika: trougla, četvorougla (kvadrat, pravougaonik, romb)
- **Praktična primena**: tanke posude, delovi od lima, plastični delovi poput instrumentalnih ploča itd.
- Uopšte posmatrano 2D diskretizacija se koristi kada je odnos **širine i debljine veći od 20.**



Princip definisanja (modeliranja) 2D elementa

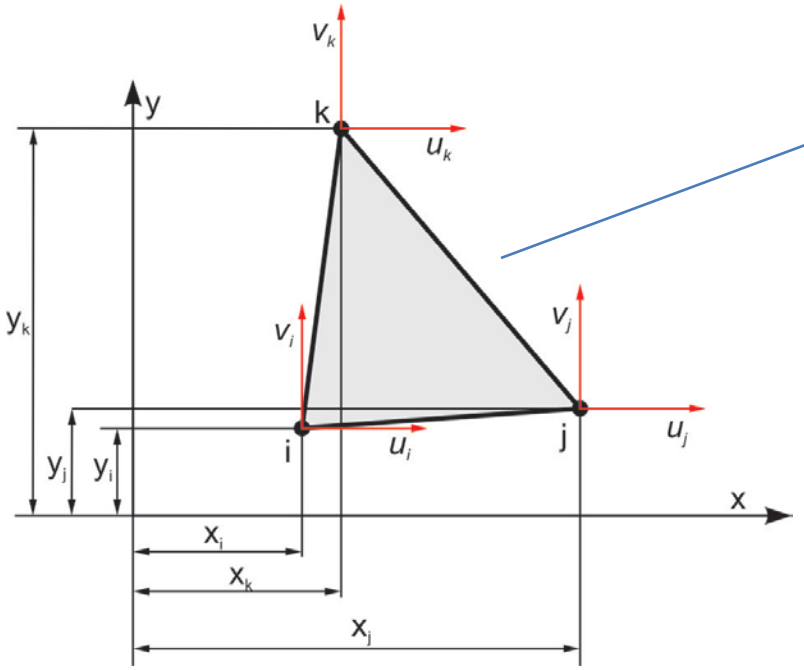


Dvodimenzionalni (ravanski) konačni elementi:
a) linearni; b) kvadratni

Tipovi konačnih elemenata

3. 2D konačni elementi tip trougla

- Standardni ravanski konačni element oblika trougla ima tri čvora i u svakom čvoru po dva stepena slobode.
- Diskretizacijom ravne strukture na trougaoni konačni element (k) u xy-ravni, dobija se element sa čvorovima ***i, j*** *i* ***k.***



$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}$$

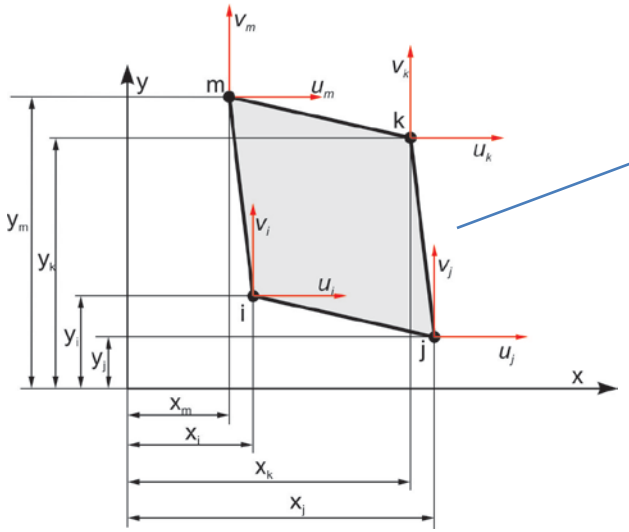
$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix}_{6x6}$$

Matrica krutosti

Tipovi konačnih elemenata

3. 2D konačni elementi tip četvorougla

- Ravanski konačni element oblika četvorougla - **četiri čvora** i u svakom čvoru po **dva stepena slobode.**
- Diskretizacijom ravne strukture na konačnim elementom (k) u xy-ravni, dobija se element sa čvorovima ***i, j, k*** *i* ***m.***



$$k_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{km} & k_{jm} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{km} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mk} & k_{mm} \end{bmatrix}$$

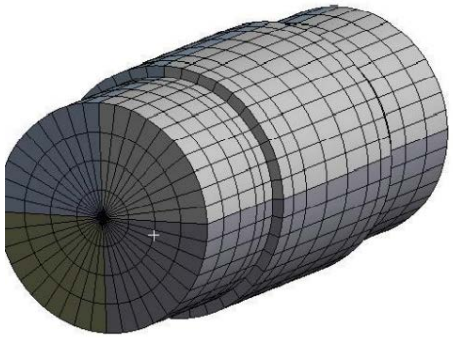
$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \dots & k_{88} \end{bmatrix}_{8x8}$$

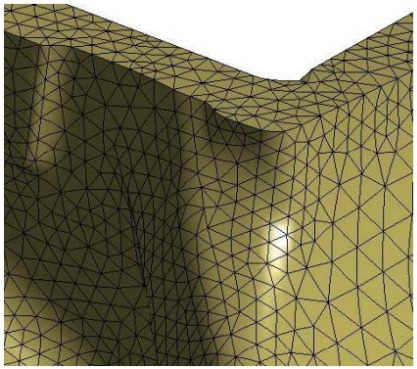
Matrica krutosti

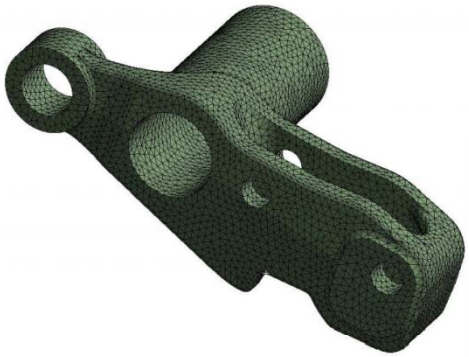
Tipovi konačnih elemenata

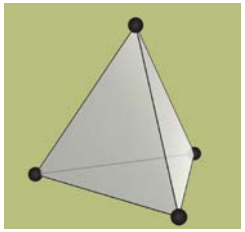
4. Trodimenzionalni konačni elementi

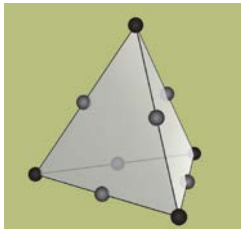
- Prostorni konačni elementi se koriste za analizu trodimenzionalnih problema. Osnovni trodimenzionalni konačni elementi su ***tetraedar, pravilni paralepiped (heksaedar) i izoparametarski trodimenzioni elementi.***
- Ako se geometrija može preslikati (simetrični i pravilni modeli), tada je poželjna heksaedarska ili tetraedarska mreža. Za sve nepravilne oblike koristi se tetra mreža.
- **Praktični primeri:** Industrijski ventili, delovi mašina alatki, kućišta, blok motora, klipnjače, itd.







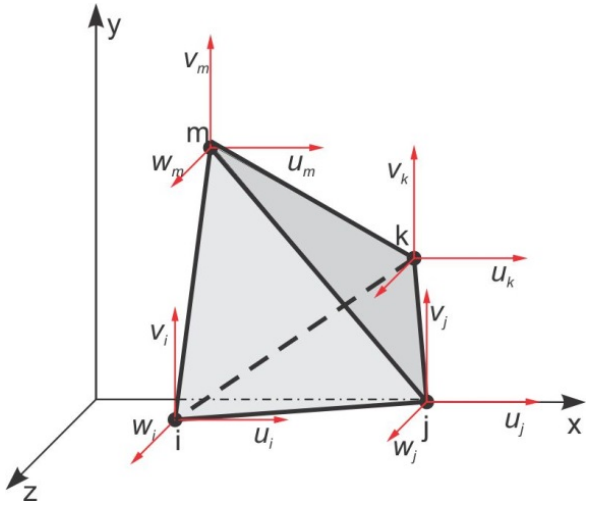




Tipovi konačnih elemenata

4. 3D konačni elementi oblika tetraedra

- Konačni elemnet oblika tetraedra ima četiri čvora (i, j, k, m) i tri stepena slobode u svakom čvoru.

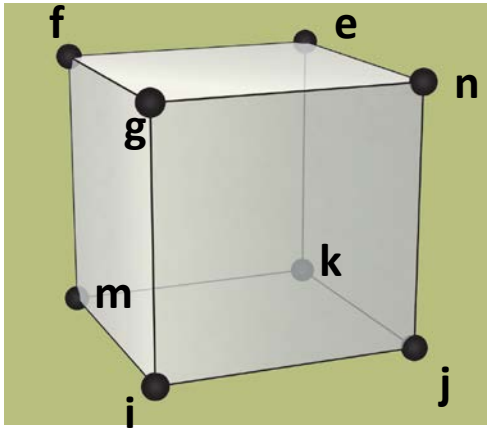


$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} & k_{jm} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} & k_{km} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mk} & k_{mm} \end{bmatrix}_{12x12}$$

Tipovi konačnih elemenata

4. 3D konačni elementi oblika paralopipeda

- Konačni elemnet oblika tetraedra ima osam čvora (i, j, k, m, n, e, f, g) i tri stepena slobode u svakom čvoru.

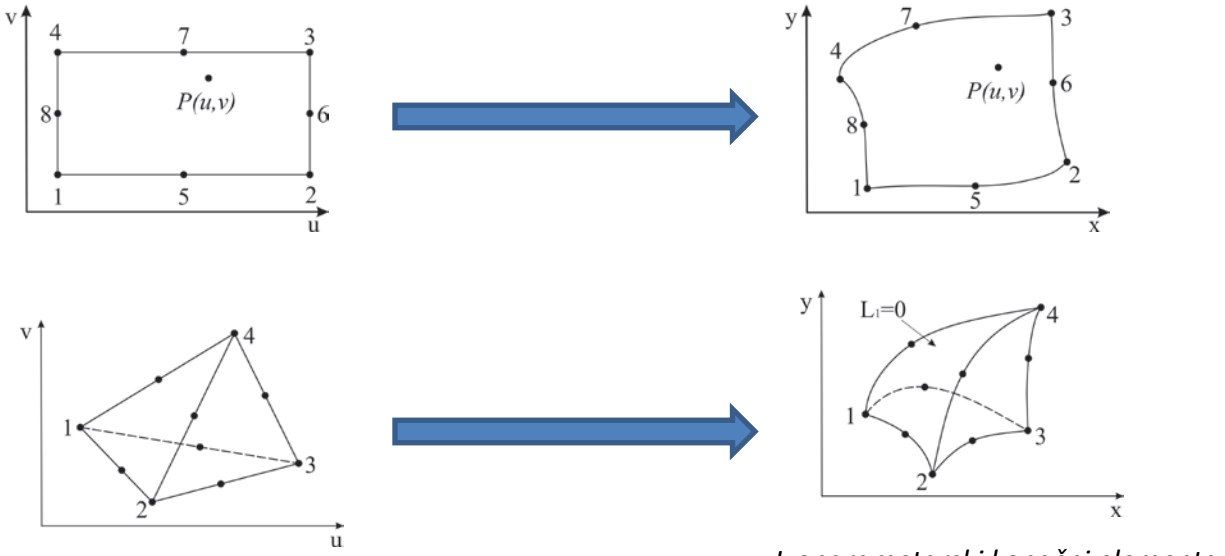


$$[k]_{(k)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & .... & k_{ig} \\ k_{ji} & k_{jj} & .... & k_{jg} \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ k_{gi} & k_{gj} & .... & k_{gg} \end{bmatrix}_{24x24}$$

Tipovi konačnih elemenata

5. Izoparametarski konačni elementi

- Konačne elemente osnovnih geometrijskih oblika moguće je preslikati, iz lokalnog koordinatnog sistema u različite nepravilne geometrijske oblike s ravnim ili zakrivljenim stranicama u opštem Dekartovom koordinatnom sistemu.
- Ako je polje pomaka konačnog elementa opisano pomoću istih interpolacijskih funkcija kao i geometrija elementa, elementi se nazivaju ***izoparametarski konačni elementi***.

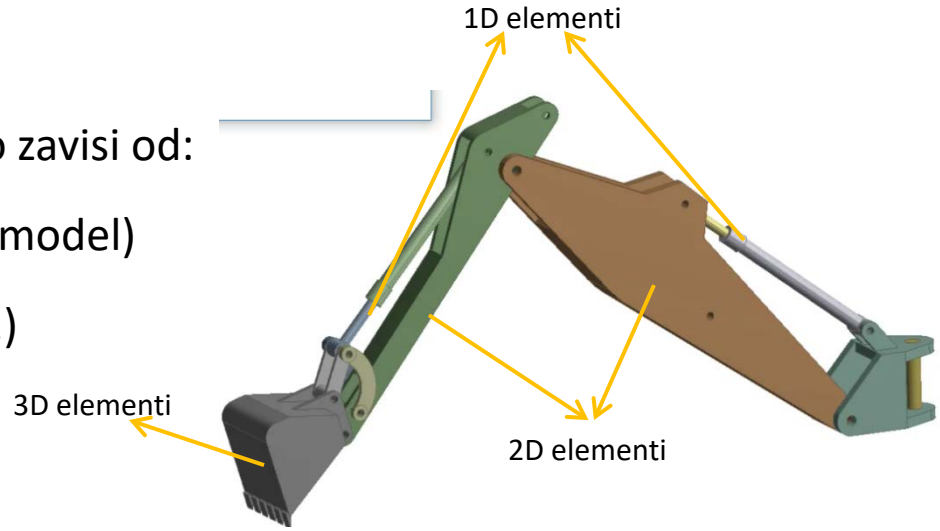


Osnovni konačni elementa *Izoparametarski konačni elementa*

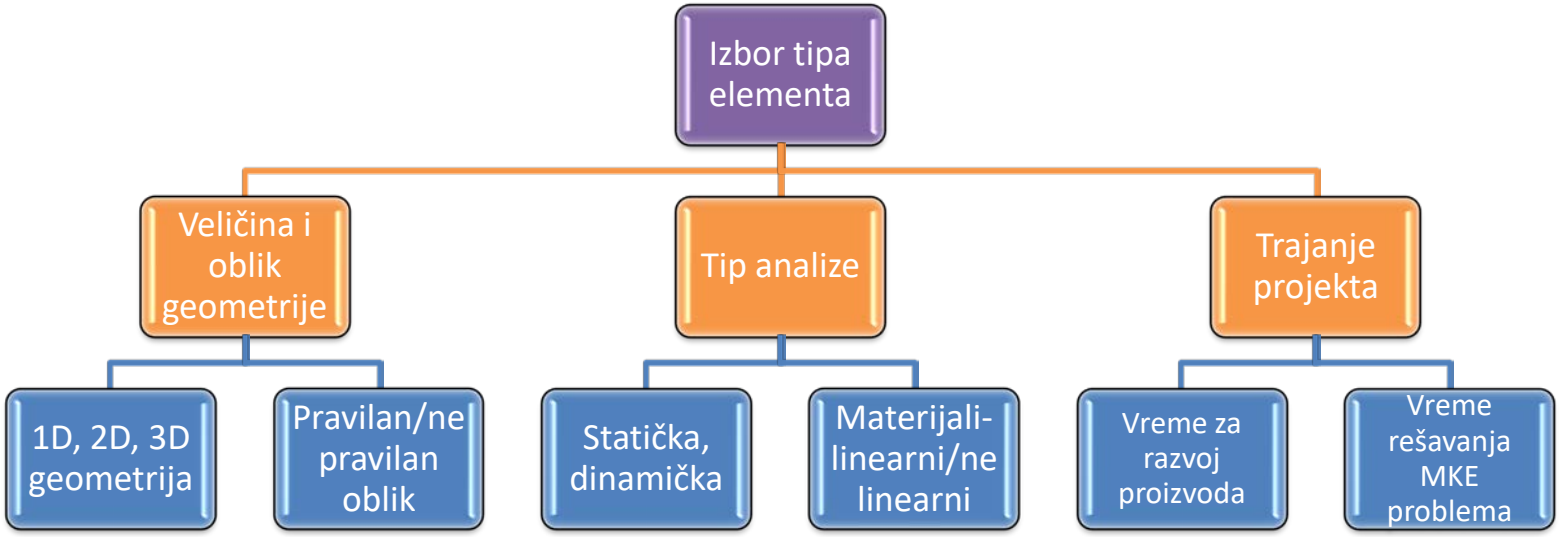
Tipovi konačnih elemenata

6. Izbor elementa za analizu

- Izbor tipa konačnog elementa prvenstveno zavisi od:
  - Geometrijskog modela (1D, 2D ili 3D model)
  - Tipa analize (strukturna, toplotna itd.)
  - Vremena potrebnog za analizu



- Tačnost analize direktno zavisi od izabranog tipa konačnog elementa.



Tipovi konačnih elemenata

6. Izbor elementa za analizu

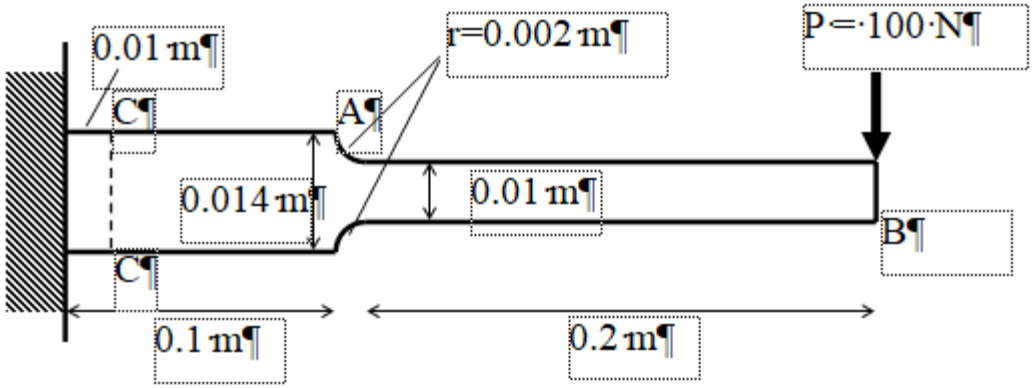
- Izbor konačnog elementa za modeliranje, zavisi od geometrijske forme posmatranog kontinuuma i procene unutrašnje distribucije sila i deformacija.
- Geometrijska forma je zadata konceptom konstrukcije i sadržana je na projektnoj dokumentaciji.
- Forme dugačkih članova (malih dimenzija poprečnog preseka u odnosu na dužinu) zamenjuju se jednodimenzionim konačnim elementima.
- Ravne površine zidova, pregrada, dijafragmi, lamela nosača, zamenjuju se dvodimenzionim konačnim elementima (obično za analizu napona).
- Tamo gde se javljaju koncentrisana lokalna naprezanja usled geometrijske složenosti, koriste se trodimenzioni konačni elementi.

Tipovi konačnih elemenata

7. Primer

Konzolna greda konstantne debljine 5 mm i promenljive visine učvršćena je na levom kraju i opterećena koncentrisanom silom P = 100 N. Dimenzije su date na slici. Modul elastičnosti E= 210 GPa, a Poissonov koeficijent *V* je 0,3.

- Odrediti vertikalna pomeranje na slobodnom kraju B, najveći napon na savijanja oko ramena A i raspodjelu napona na savijanje i smicanja duž vertikalne linije C-C (0,01 m od tog fiksnog kraja).
- Prethodno odrediti preko 1D, 2D i 3D modela

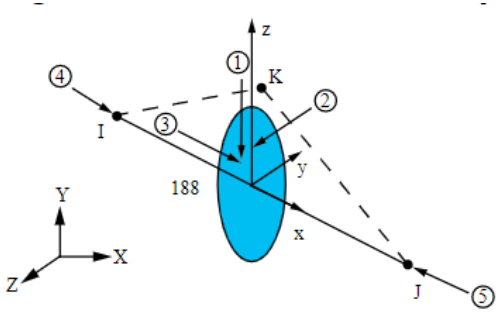


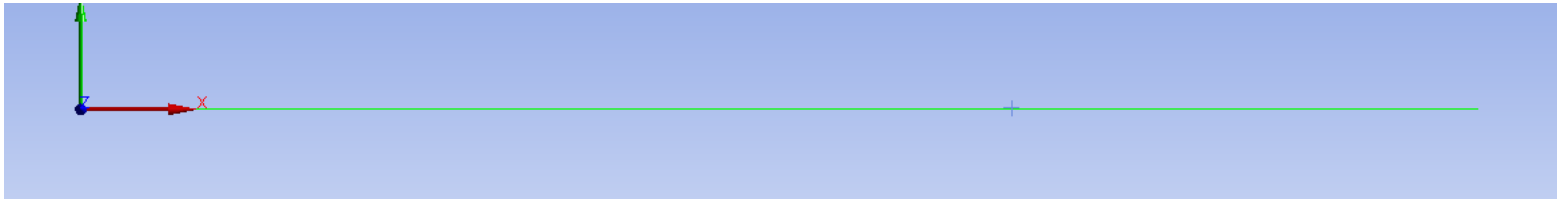
Debljin grede= 0.005 m

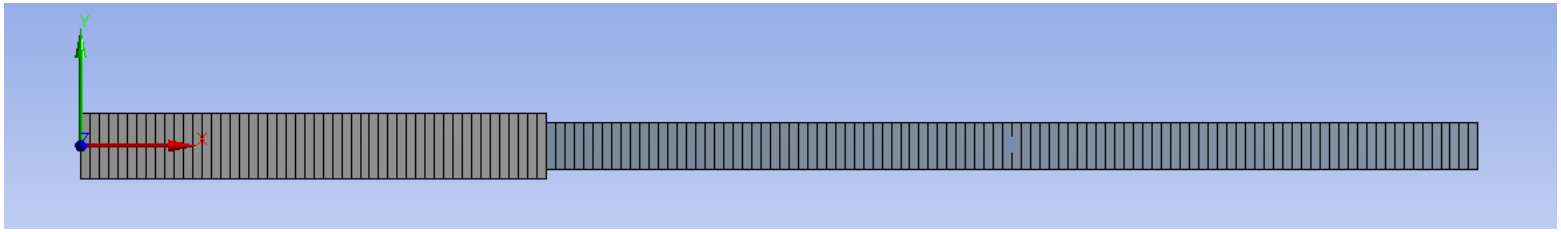
Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 1D element

- Konačni element: tipa grede BEAM 188
- Koristi se za analizu vitkih do umerno debelih grednih struktura. Element se zasniva na Timošenkovoj teoriji grede, koja uključuje deformacija smicanja.
- Element može biti opisan linearnom, kvadratnom i kubnom funkcijom. Ima dva čvora i po šest stepeni slobode u svakom čvoru (tri translacije i tri rotacije).



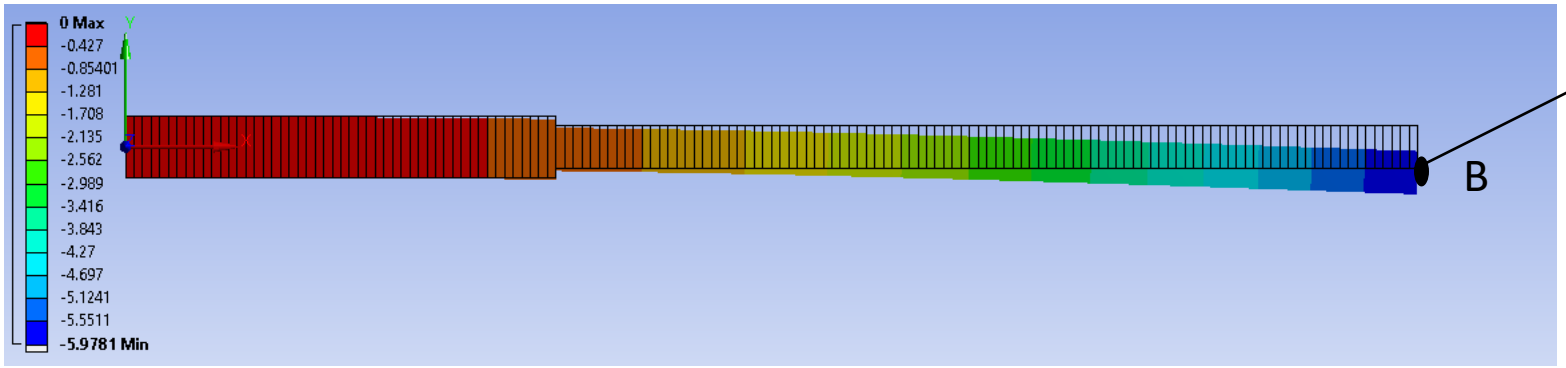




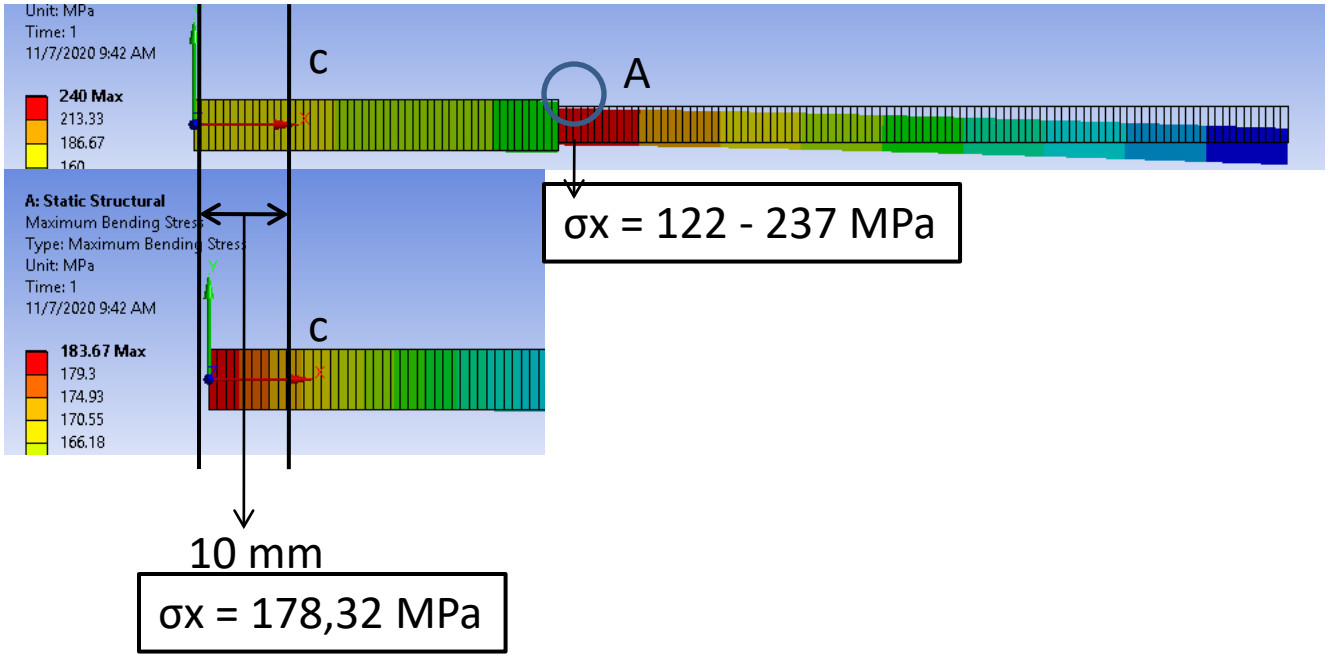
Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 1D element

Pomeranje



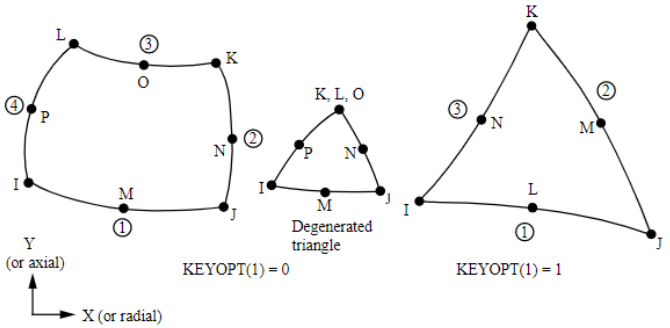
Napon na savijanje

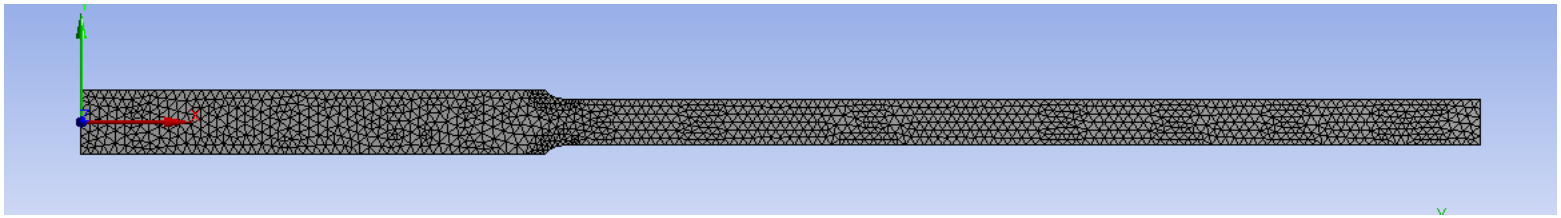


Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 2D element

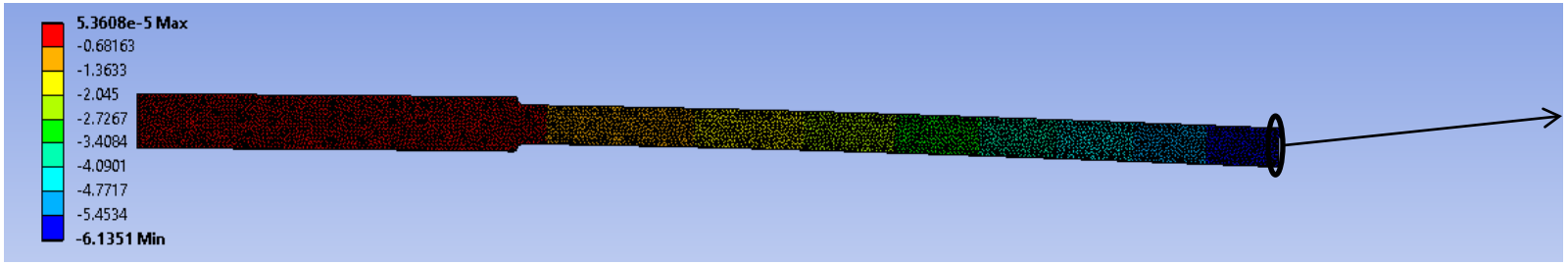
- Konačni element: ravanski element plane 183
- Plane 183 je 2D element višeg reda sa osam ili šest čvorova. Interpolaciona funkcija je kvadratnog oblika i pogodan je za meširanje nepravilnih mreža.
- U svakom čvoru ima po dva stepena slobode (translacije u X i Y pravcu). Može se koristiti za određivanje ravanskog stanja napon, ravnskog stanja deformacija ili kao osno-simetrični element (sa ili bez uvijanja).



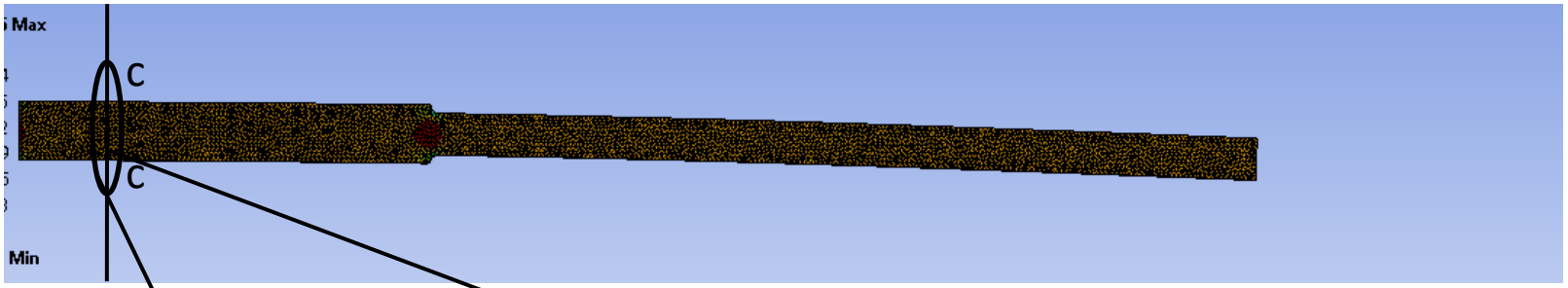


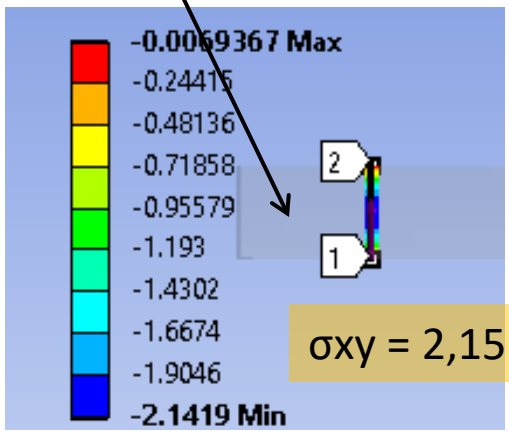
Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 2D element



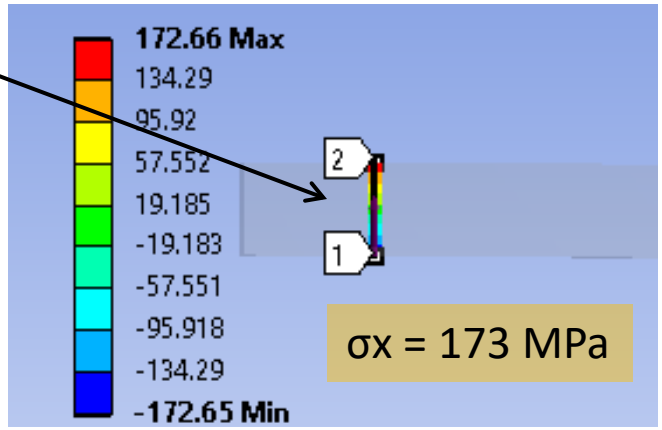
Uy = 6,13 mm





σxy = 2,15 MPa

Napon smicanja duž preseka C-C



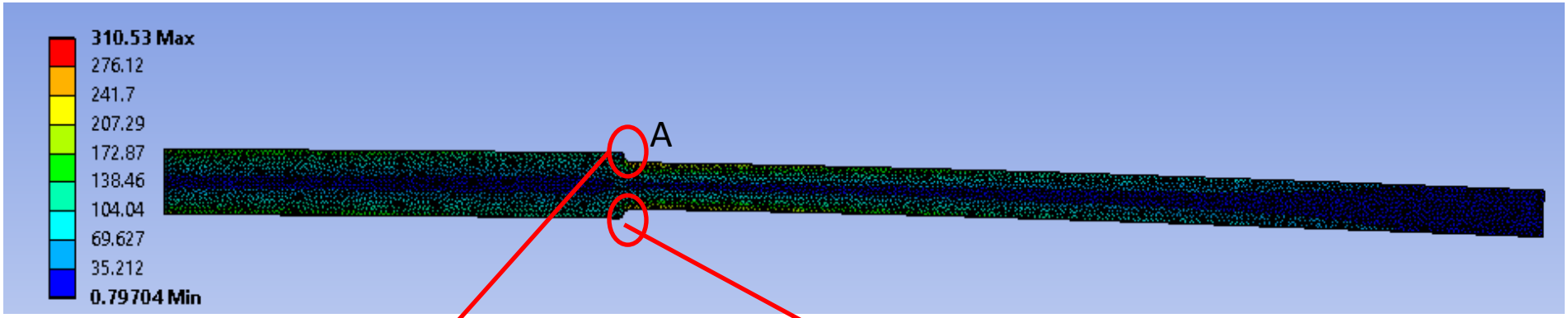
σx = 173 MPa

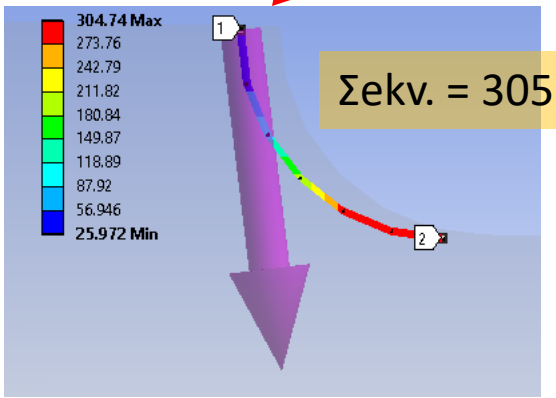
Normalni napon duž preseka C-C

Tipovi konačnih elemenata

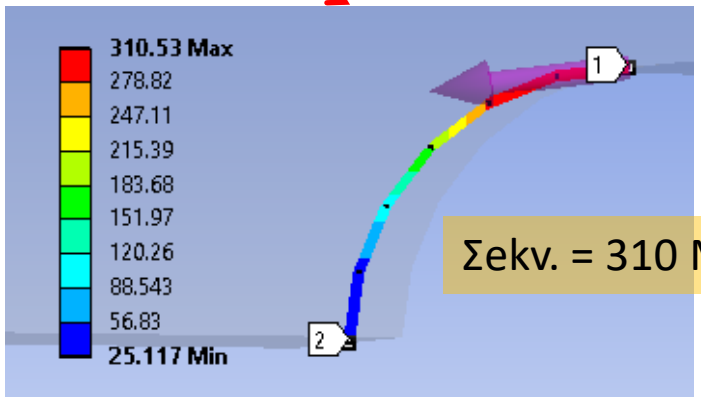
7. Primer – 2D element

Ekvivalentni Misses-ovi naponi





Σekv. = 305 MPa

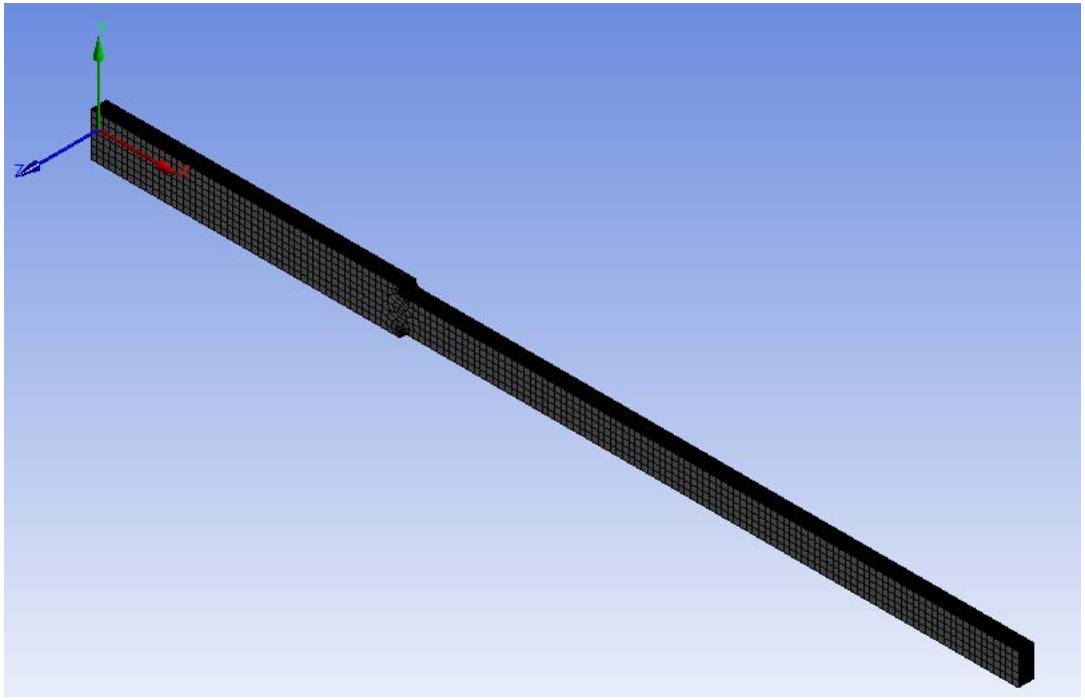


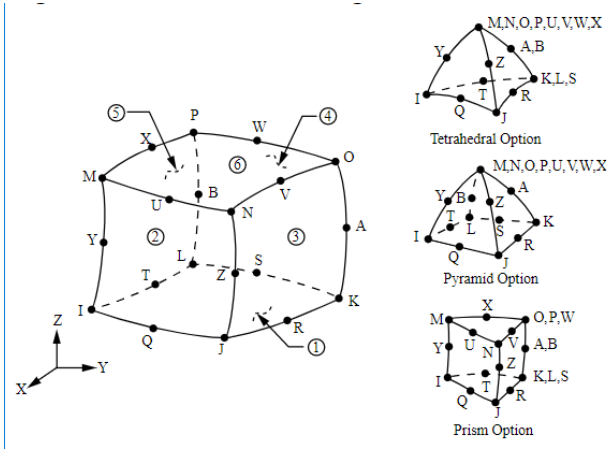
Σekv. = 310 MPa

Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 3D element

- Konačni element: zapreminski element solid 183
- Solid 183 je 3D element sa interpolaciona funkcija kvadratnog oblika.
- U osnovnoj varijanti element ima 20 čvorova i u svakom po tri stepena slobode (translacije u X, Y i Z pravcu). Solid 183 se još može koristiti i u obliku piramide (13 čvorova), tetraedra (10 čvorova) i prizme (15 čvorova).
- Element podržava plastičnost, hiperplastičnost, puzanje, veliko ugibanje i mogućnosti velikog naprezanja.

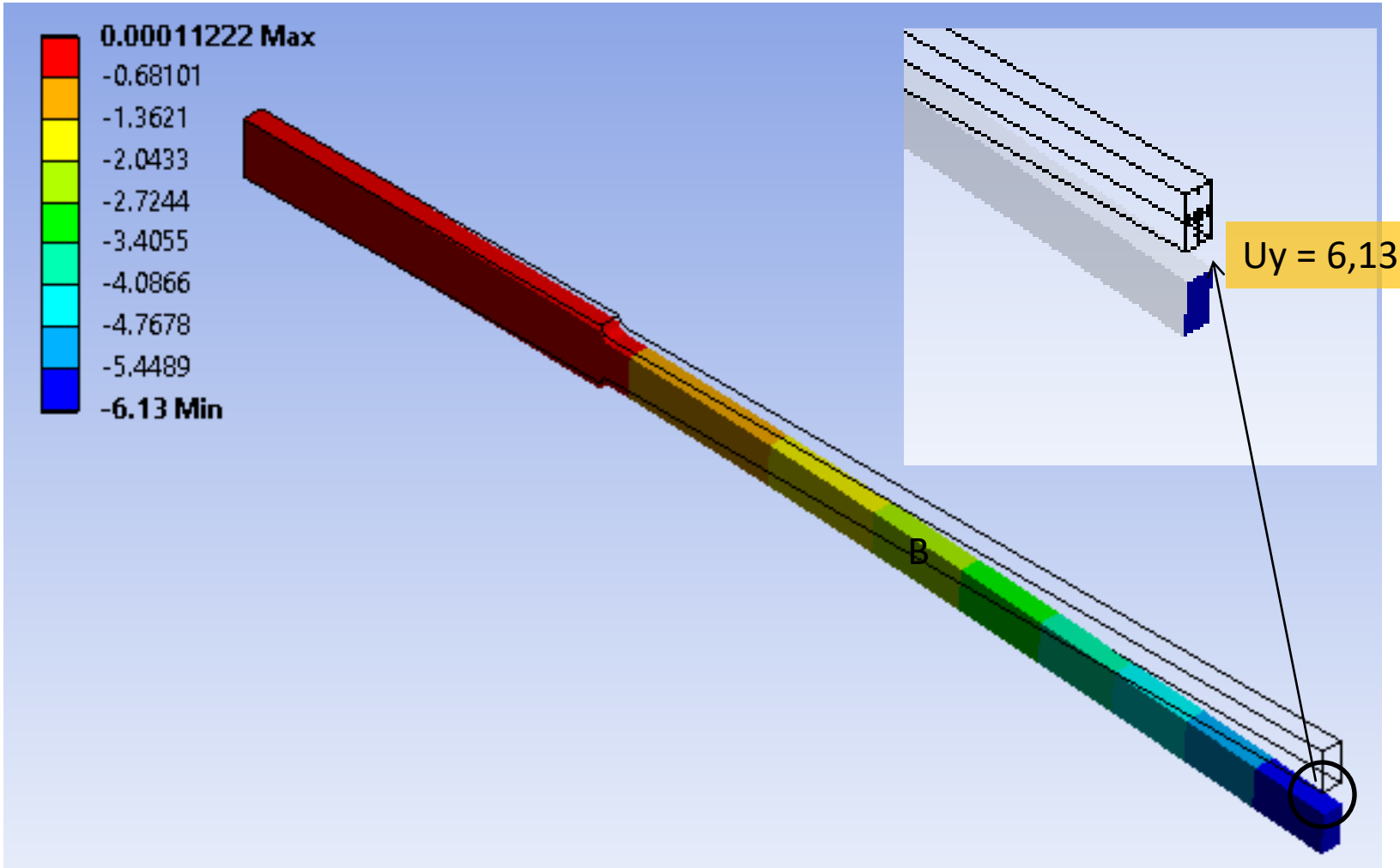




Tipovi konačnih elemenata

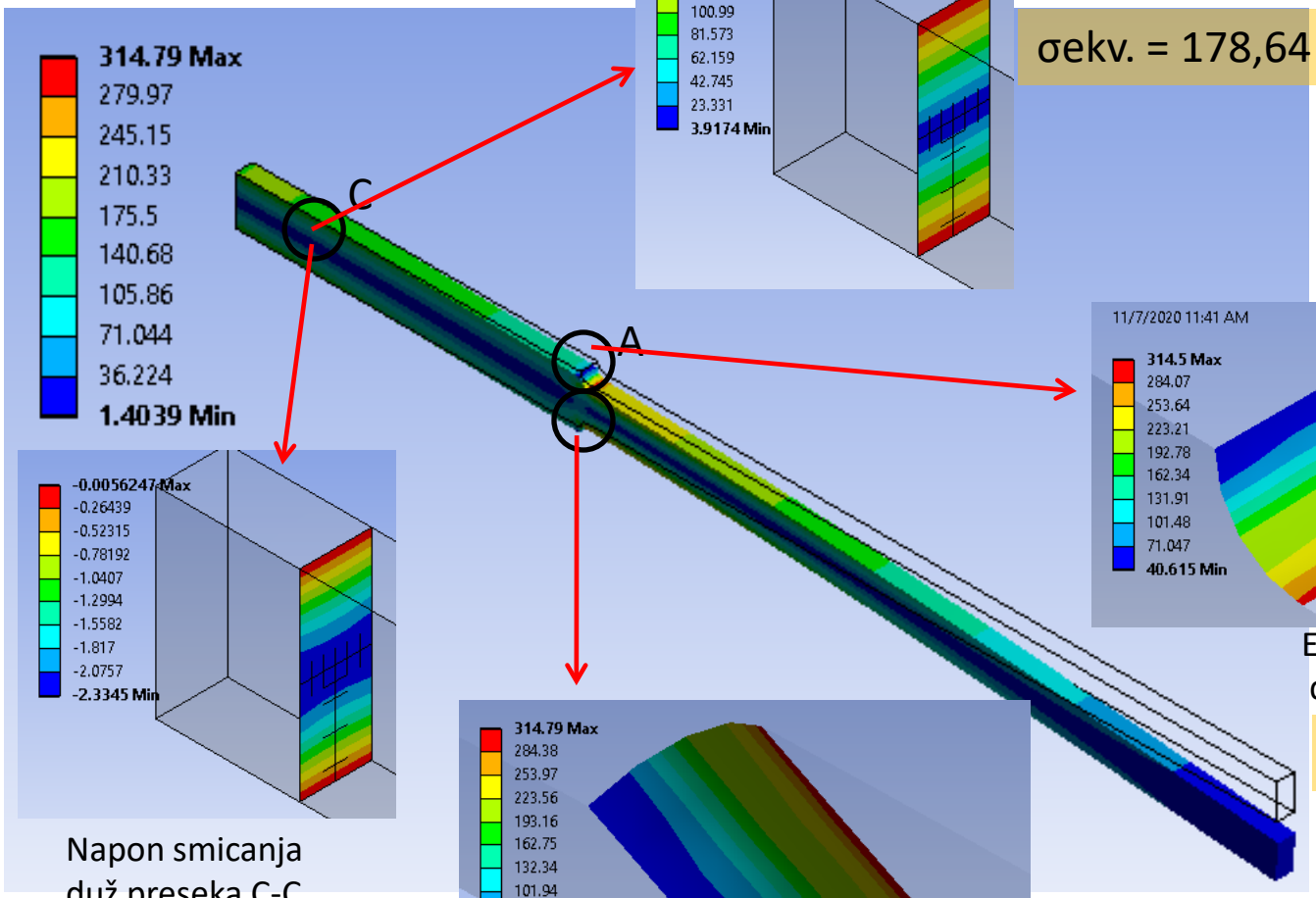
7. Primer – 3D element

Pomeranje u pravcu dejstva sile



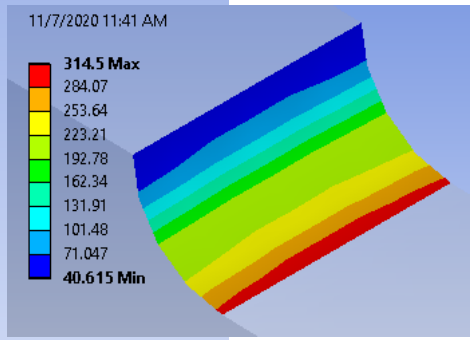
Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – 3D element



Ekvivalentni Misses-ovi naponi duž preseka C-C

σekv. = 178,64 MPa

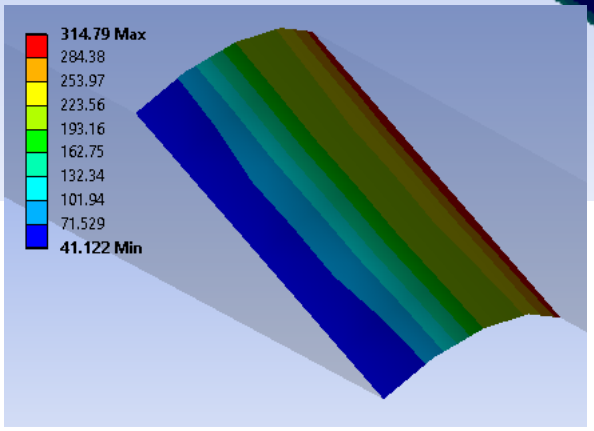


Ekvivalentni Misses-ovi naponi duž ramena A

σekv. = 314 MPa

Napon smicanja duž preseka C-C

σxy = 2,33 MPa



Ekvivalentni Misses-ovi naponi duž ramena A

σekv. = 314 MPa

7. Primer – Kastiljanova teorema

Moment u funkciji X koordinate:

$$M = -P(L - x)$$

Moment inercije se menja sa promenom x-koordinate pa ‘e pomeranje tačke B biti:

$$u_{yB} = \int_0^{0.1} \frac{M(\partial M / \partial P)}{EI_1} dx + \int_{0.1}^{0.302} \frac{M(\partial M / \partial P)}{EI_2} dx$$

$$= \int_0^{0.1} \frac{-P(L-x)(-(L-x))}{E(h_1^3 b/12)} dx + \int_{0.1}^{0.302} \frac{-P(L-x)(-(L-x))}{E(h_2^3 b/12)} dx$$

$$= \frac{P}{E(h_1^3 b/12)} \left[L^2 x - L x^2 + x^3/3 \right]_0^{0.1} + \frac{P}{E(h_2^3 b/12)} \left[L^2 x - L x^2 + x^3/3 \right]_{0.1}^{0.302}$$

$$= 0.00582 = 5,82 \ [mm]$$

Maksimalni napon duž Y ose u preseku C-C:

$$\sigma_{max} = \frac{M(h_1/2)}{EI_1} = \frac{M(h_1/2)}{E(h_1^3 b/12)} = \frac{P(0.302 - 0.01) h_1/2}{E(h_1^3 b/12)} = 178.8 \text{ MPa}$$

Napon smicanja u preseku C-C:

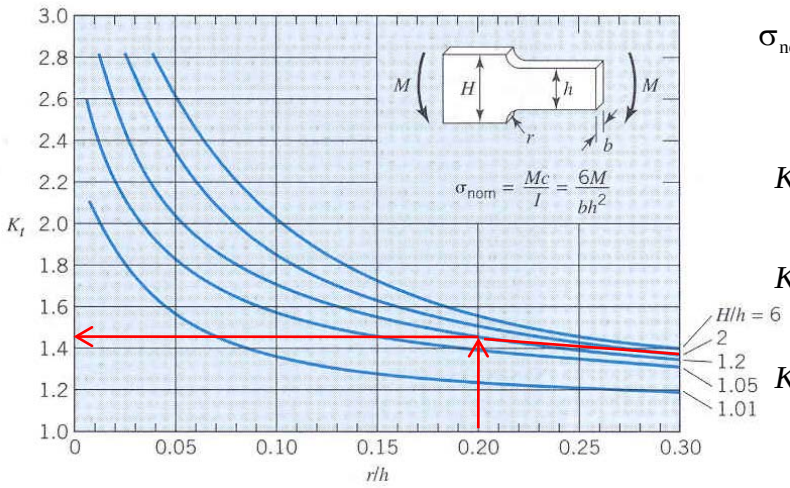
$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3*100N}{2*(h_1 * b)} = \frac{3*100}{2*0.014*0.005} \cdot 10^{-6} = 2.14 \ \ MPa$$

Tipovi konačnih elemenata

7. Primer – Poređenje rezultata

	Kastiljanova teorema	1D element	2D element	3D element
Pomeranja tačke B Uy [mm]	5,84	5,98	6,13	6,13
Normalni naponi u preseku C [MPa]	178,8	178,32	173	178,64
Normalni naponi na ramenu B [MPa]	-	237	310	314
Naponi smicanja u preseku C [MPa]	2,14	-	2,15	2,33

Koeficijent koncentracije napona za tačku A



$$\sigma_{nom} = \frac{M(h_2/2)}{EI_2} = \frac{M(h_2/2)}{E(h_2^3 b/12)} = \frac{6M}{Eh_2^2 b} = \frac{6*100*(0.302-0.102)}{210e9*0.01\text{^}2*0.005} = 240.0\ \text{MPa}$$

$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{237}{240} = 0,98$$ - 1D element

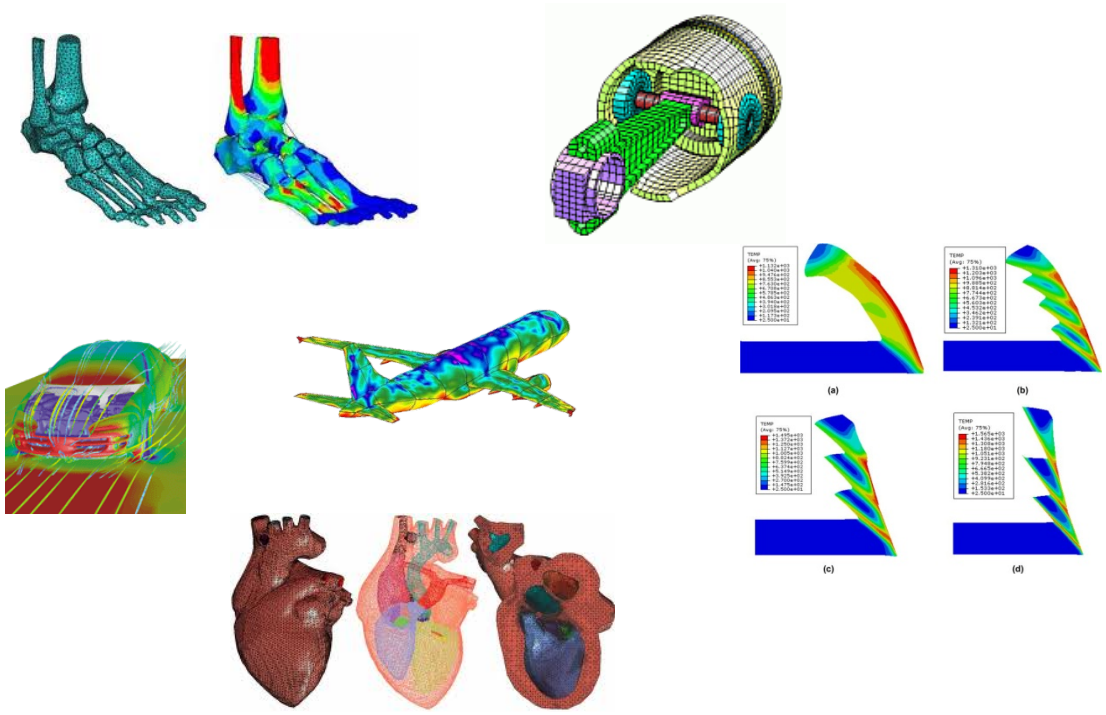
$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{310}{240} = 1,29$$ - 2D element

$$K_t = \frac{(\sigma_x)_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{314}{240} = 1,30$$ - 3D element

Za H/h = 1,4 i r/h = 0,2
sa dijagrama Kt ≈ 1,45

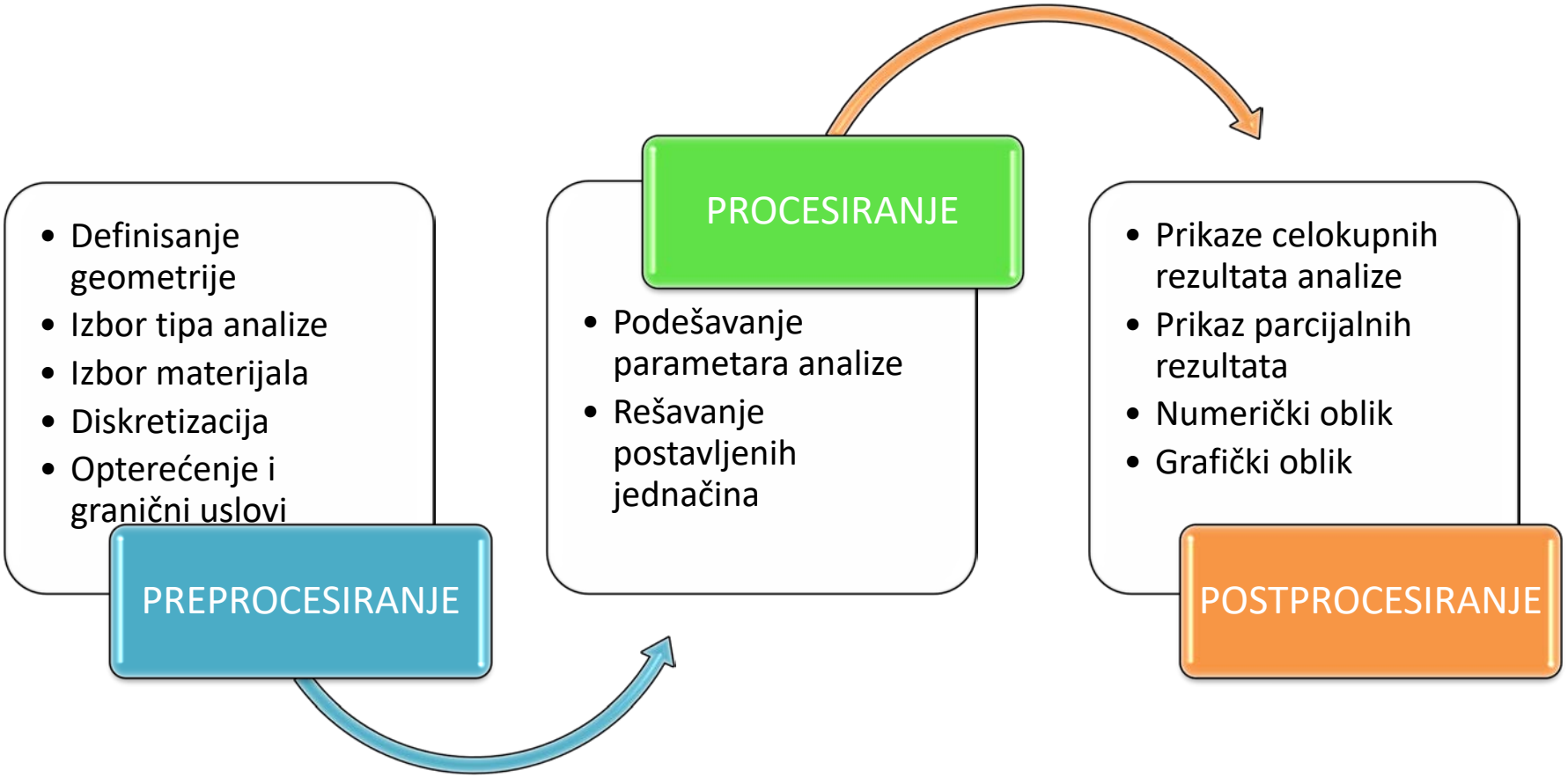


4. Analiza u programskim sistemima baziranim na MKE



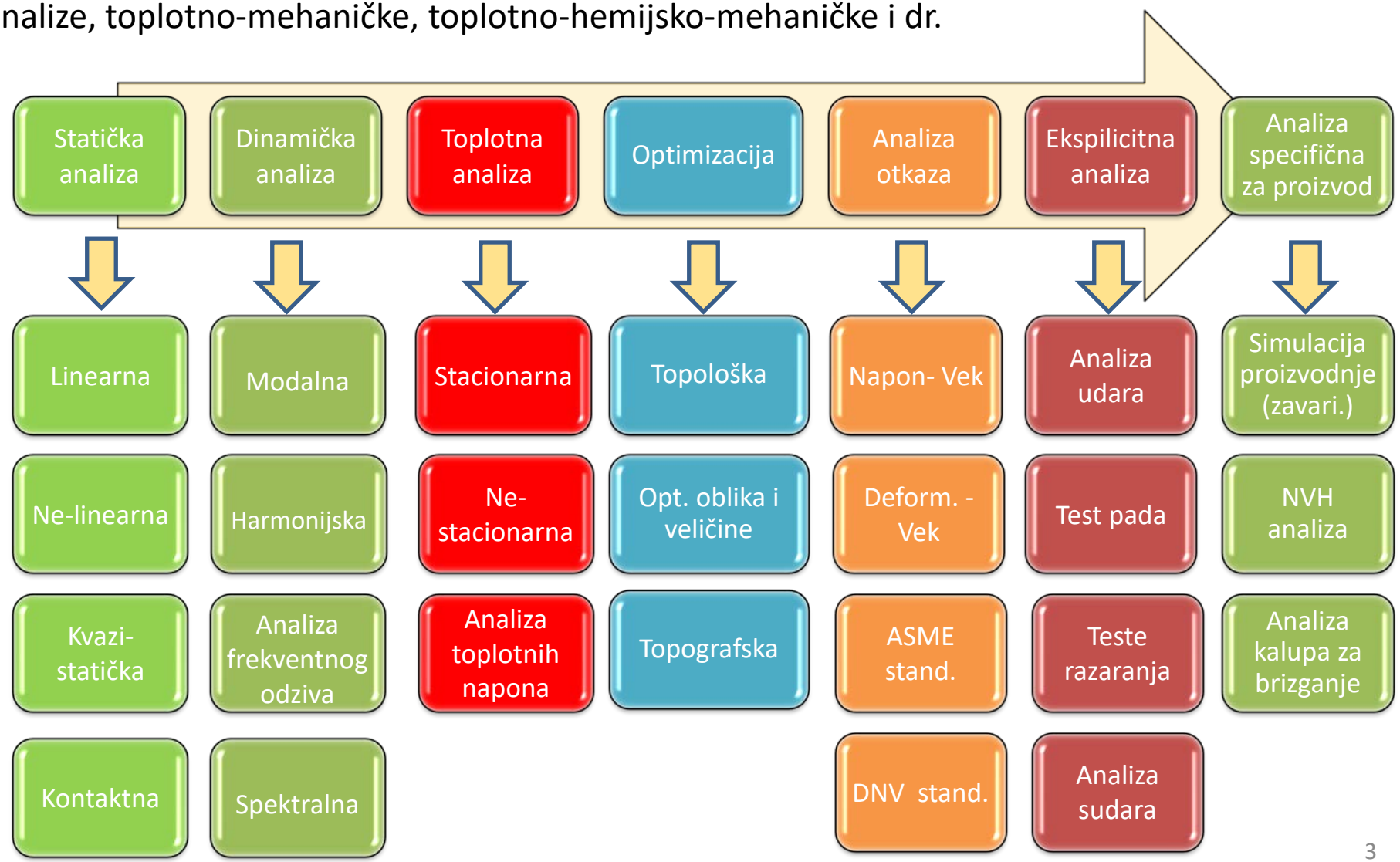
1. Proces analize u programskim sisitemima

Proces analize u programskim sistemima baziranihm na metodi konačnih elemenata, definsan je kroz tri faze.



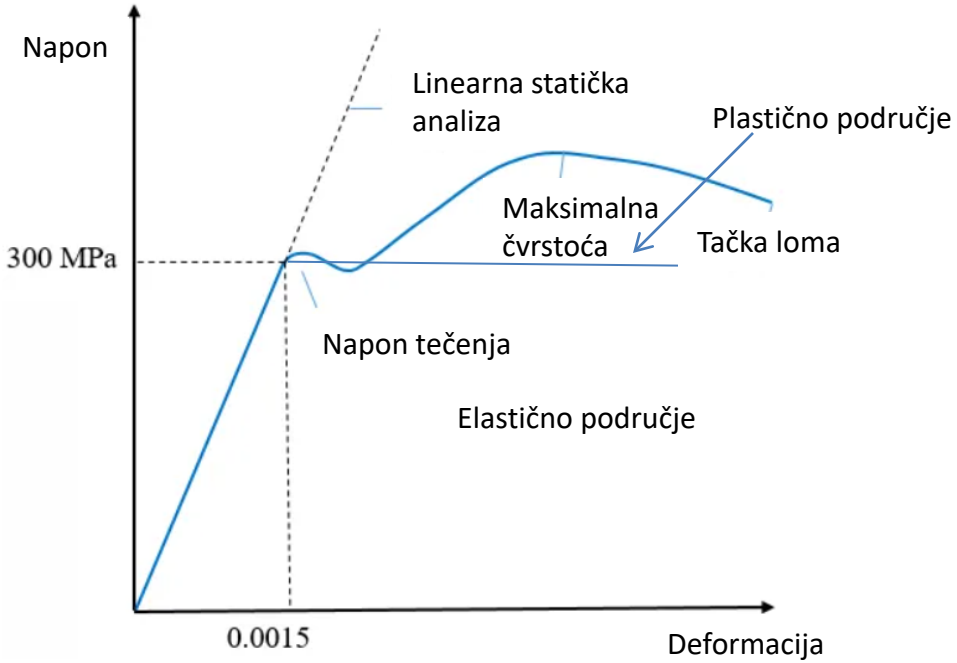
2. Pojedini tipovi analize

Jedna od najvećih prednosti je primena na povezane probleme poput: fluidno-strukturne analize, toplotno-mehaničke, toplotno-hemijsko-mehaničke i dr.



3. Definisanje osobina materijala

- Svojstva materijala su veoma važna i prva pretpostavka se odnosi da bilo koji MK model se u potpunosti može definisati sa mehaničkim osobinama materijala.
- Najveći broj matrijala koji se koriste za analize su linearni izotropni materijali.
- Mehaničke osobine koje se uvek moraju definisati kod analiza su: **modul elastičnosti**, **Paosonov koeficijent.**
- Potrebna svojstva materijala zavise od tipova analize koje se izvršavaju (linearna ili nelinearna, statička ili dinamička analiza, stacionarna ili ne-stacionarna, itd.).



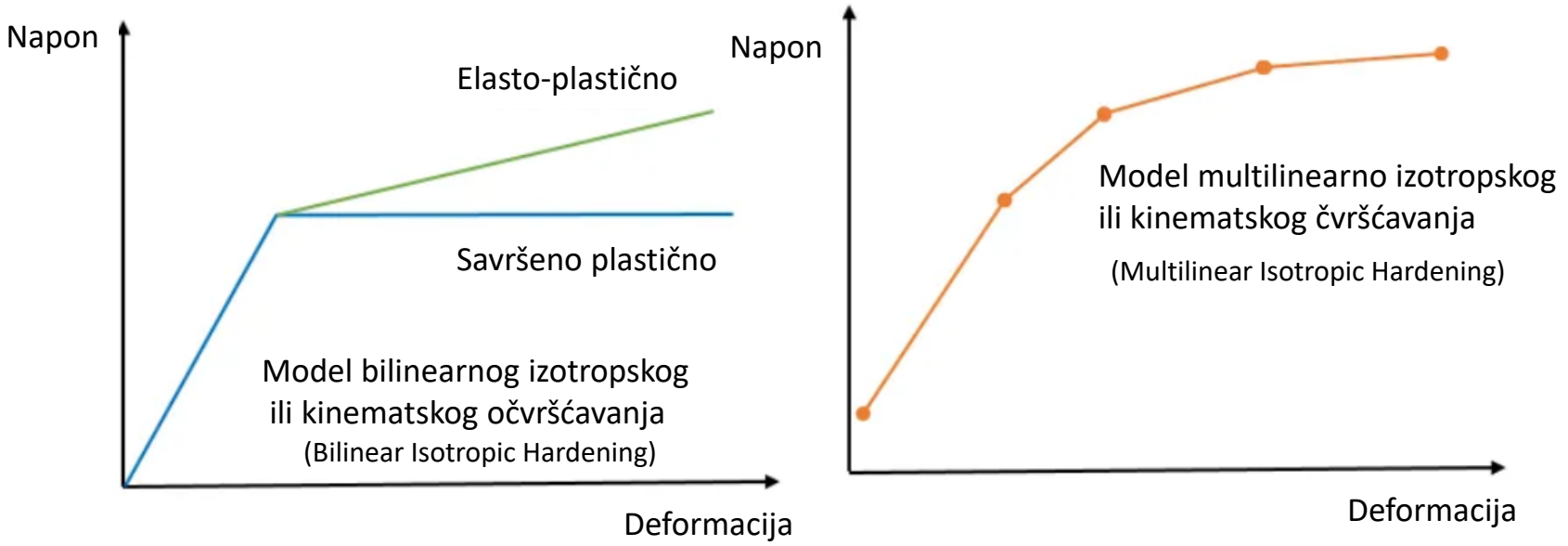
3. Definisanje osobina materijala

- Minimum svojstava materijala koji su potrebni za pojedine analize.

Svojstva materijala	Liearna statička	Nelinear. kontaktna	Nelinearni materijali	Nelinearna dinamička	Analiza otkaza	Linearna dinamička, modalna itd	Stacion. toplotna	Nestacio. toplotna
Modul elastičnosti	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
Paos. koef.	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA
Gustina	DA	DA	DA	DA	DA	**DA***	DA	DA
Topl. provodljiv.							DA	DA
Top. širenje							DA	DA
Spec. toplota							DA	DA
Krina napon – deform.			DA					
Kriva veka otkaza (SN kriva)					DA			

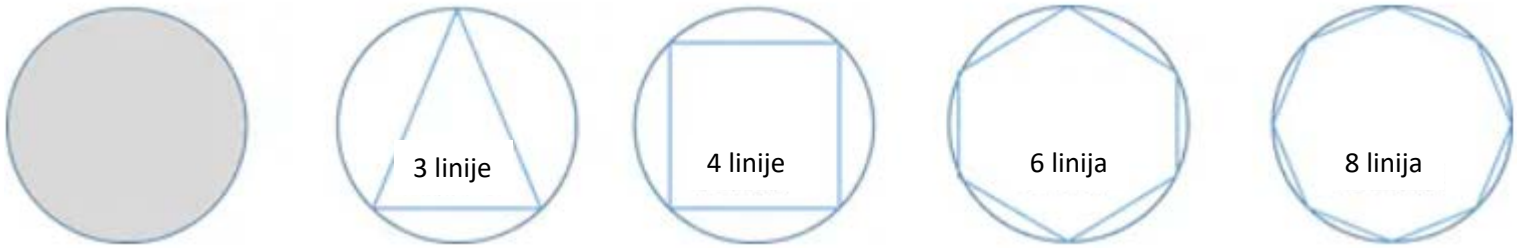
3. Definisanje osobina materijala – Bilinearni ili multilinearni izotropni materijal

- Mehaničke osobine koje se uvek moraju definisati kod ovih materujala su: **granica tečenja (yield strength)**, **tangentni modul elastičnosti (tangent modulus).**
- Matrice krutosti kod nelinearnog ponašanja materijala imaju formalno isti oblik kao i pri linearnom ponašanju materijala, ali se umesto **konstantnog modula elastičnosti** (E) javlja **tangentni modul** (Et) koji zavisi od nivoa naprezanja u elementu.
- Bilinearni materijali se mogu definisati kao elasto-plastični i savršeno plastični materijali



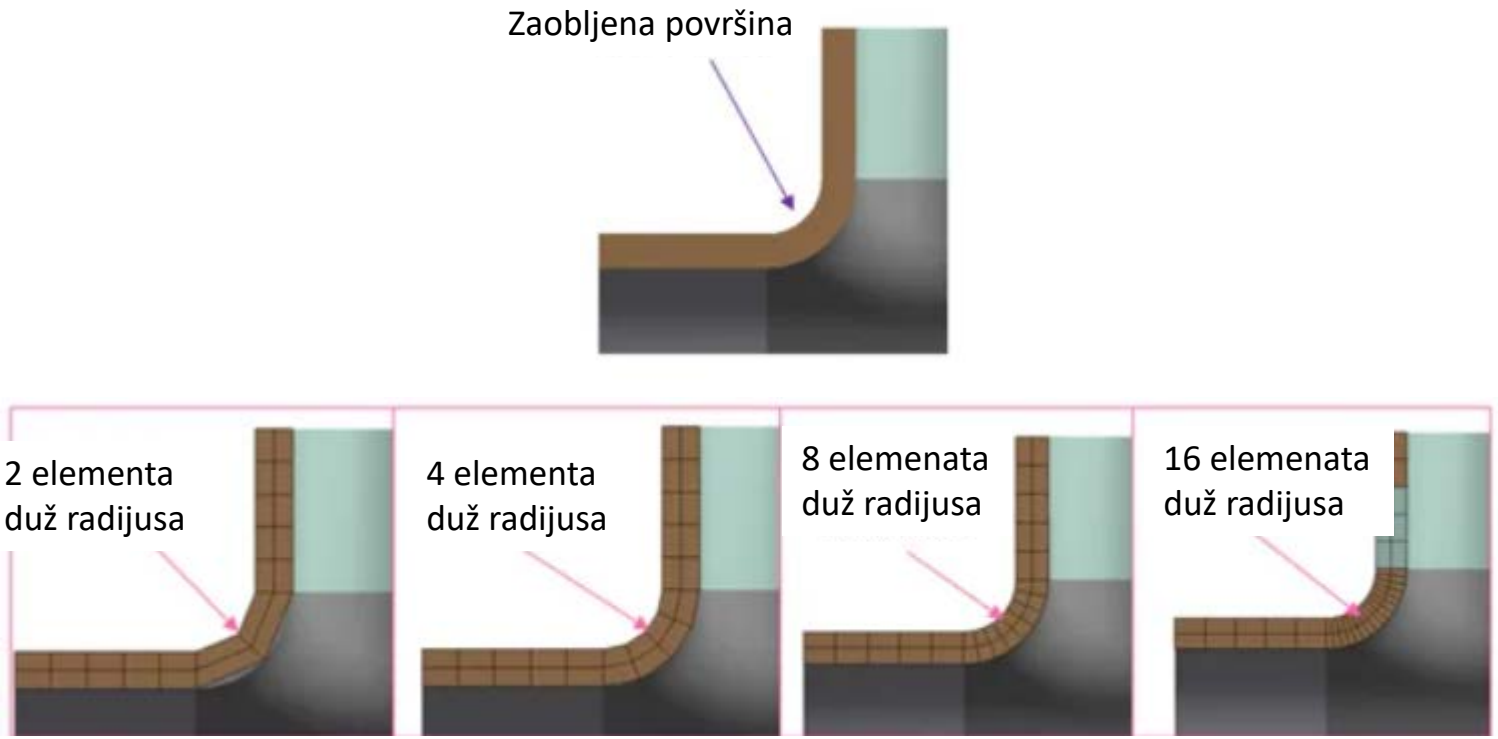
4. Diskretizacija

- Cilj diskretizacije modela da što vernije definiše oblik i ponašanje realnog fizičkog sistema, konstrukcije i sl.
- U ovom delu aktivnosti treba izabrati i takve konačne elemente koji imaju osobine da najbolje simuliraju ponašanje realnog fizičkog objekta.
- Od veličine elementa, načina diskretizacije i vrste elementa direktno zavise i rezultati analize.
- Generisanje mreže, pre svega, zavisi od geometrije posmatranog objekta.



4. Diskretizacija

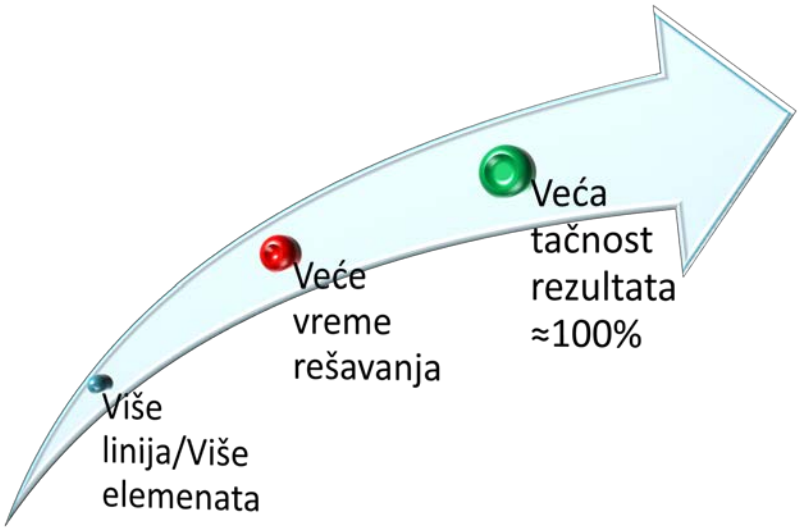
- Ako na posmtranom problemu postoje radijusi gde se javlja koncentracija napona, mreža konačnih elemenata mora biti gušća, odnosno sitnija (manja dužina stranice konačnog elementa) bliže tim zonama.
- Veći broj čvorova i elemenata = **VEĆA TAČNOST IZLAZNIH PARAMETARA**

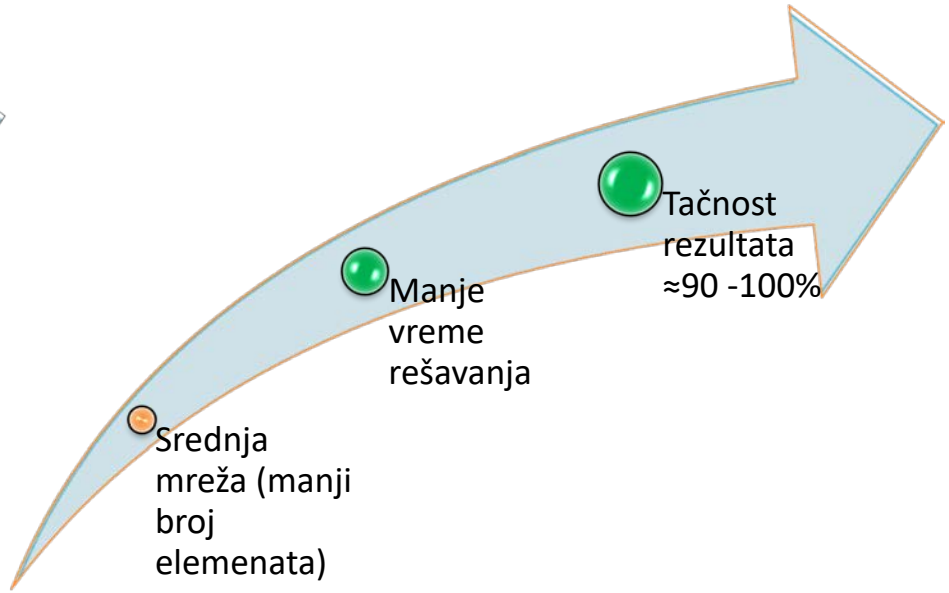


4. Diskretizacija

Zašto uvek ne uzeti gušću mrežu i veliki broj čvorova ?

- Vreme rešavanja zavisi od ukupnog broja stepeni slobode koje treba analizirati, odnosno ono je direktno proporcionalno broju stepeni slobode.
- Srednja veličina mreže redukuje vreme rešavanja, bez uticaja na tačnost izlaznih parametara.





4. Diskretizacija – Koji tip diskretizacije (Mesh) koristiti i kada?

Standard Mesh (High Quality)

- jednostavne prizmatične delove,
- osovine, vratila, ploče, nosače,
- analizu sklopova.
- za analize u početnoj fazi proračuna

za brzu procenu opštih rešenja itd...

Prednosti:

- ✓ brza diskretizacija i proračun,
- ✓ dovoljno tačan za 70–80% simulacija.

Curvature-Based Mesh

- mali radijusi,
- zakrivljene površine,
- rupe/otvori sa malim radijusom,
- Delovi gde je potrebna tačnost zakrivljene geometrije (zupčanici, bregaste ploče, turbinske lopatice itd..)
- delovi sa značajnom zakrivljenošću.

Prednosti:

- ✓ Automatski definiše manje elemente oblasti sa velikom zakrivljenošću
- ✓ Omogućava tačniju raspodelu napona oko radijusa, rupa/otvora idr...
- ✓ Smanjuje potrebu za ručnim mesh kontrolama

4. Diskretizacija – Koji tip diskretizacije (Mesh) koristiti i kada?

Blended Curvature-Based Mesh

- Za veoma kompleksne dijelove koji imaju kombinaciju različitih površina (velike ravne površine + vrlo male zakrivljene površine.
- Modeli kod kojih običan ***Curvature-based mesh*** postaje previše gust ili ne uspeva da se generiše.
- **Simulacije visokog nivoa detalja**, kao što su:
  - tanko–zidne strukture kombinovane sa punim (solid) elementima,
  - livene i kovane komponente,
  - složena, nepravilna, glatka 3D forma, bez jasnih prizmatičnih ili cilindričnih segmenata (biomehaničkih delova, aerodinamičke forme, modeli sa nepravilnim i glatkim prelazima).

Prednosti:

- ✓ Obezbeđuje bolje prelaze između zona različite gustine mreže i sprečava previše male elemente,
- ✓ Poboljšava konvergenciju i smanjuje računarsko opterećenje u poređenju sa čistim ***curvature-based mesh-om.***

4. Diskretizacija – Koji tip diskretizacije (Mesh) koristiti i kada? PREPORUKE

Prizmatični delovi - PRIMER

Tip dela	Najbolja mreža	Razlog
Solid - ekstrudirani blok	Standard	Ravne površine, jednostavno
Nosač sa rupama	Standard + Mesh Controls	Rupe zahtevaju fino meširanje
Nosač rama	Standard	Dugi prizmatični članovi
Prizmatični deo sa malim radijusima 0.5 mm	Curvature-Based	Potrebni sitni elementi na radijsu
Prizmatični deo sa jednim kompleksnim zakrivljenim džepom	Blended Mesh	Dobar prelaz između zona

4. Diskretizacija – Koji tip diskretizacije (Mesh) koristiti i kada? PREPORUKE

Rotacioni delovi- PRIMER

Geometrijska karakteristika	Preporučena mreža	Zašto
Osovine/vratila	**Standard (High Quality)**	Brzo, tačno za moment savijanja
Radijusi i ramena	**Curvature-based ili Mesh Control**	Veliki gradijent napona
Ležišta (kontakt unutrašnjeg prstena)	**Blended Mesh**	Kompleksna zakrivljenost + glatki prelaz
Žljebovi za klin/ mali žlebovi	**Curvature + Mesh Control**	Sprečava premalo meširanje
Ceo sklop	**Standard + ciljane Mesh kontrole**	Uravnotežena tačnost i performanse

4. Diskretizacija – Kako da odredim veličinu kon. elementa? – PREPORUKE

Prizmatični delovi

Opšta veličina elementa:

- ❑ *3–10% najmanje dimenzije dela.*

Ostali detalji na prizmatičnim delovima:

- rupe/otvori: element = **prečnik / 6**
- radijusi: element = **R / 3 do R / 5**
- ivice sa koncentrisanim opterećenjem: element = **1–3 mm**
- kontaktne površine : element = **1–2 mm**

Rotacioni delovi

Opšta veličina elementa:

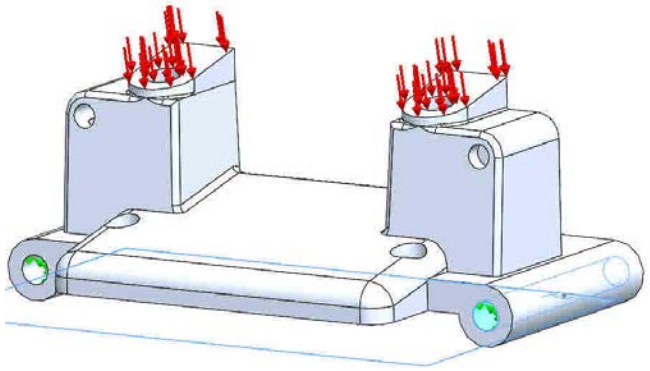
- ❑ *3 - 7% od prečnika.*

Ostali detalji na rotacionim delovima:

- žljeb za klin: element = **0.5 do 1 mm**
- žljeb za seger: element = **0.3 do 0.8 mm**
- radijusi: element = **R / 3 do R / 5**
- ivice sa koncentrisanim opterećenjem: element = **1–3 mm**
- kontaktne površine (ležaj - vratilo) : element = **1–1.5 mm**
- zona oko mesta uležištenja: element = **0.5 – 1 mm**

4. Diskretizacija – Kako da odredim veličinu kon. elementa? – PREPORUKE

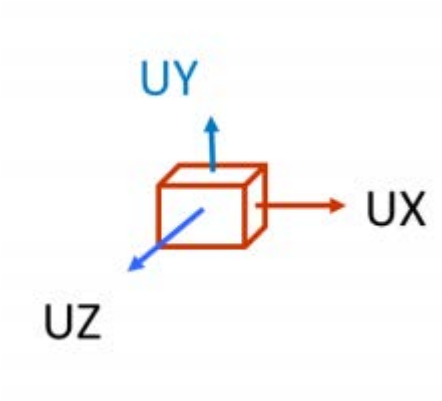
PRIMER



Tip mreze	Broj elemenata	Broj čvorova	Napon [MPa]
Standard	12057	22176	29
Standard+mesh control	56499	93112	22.8
Curvatrure	42856	70851	22.8
Blanded	26999	46257	20.6
Redifine Standard Mesh	120915	190772	22.8

5. Opterećenja i ograničenja

- Opterećenja i oslonci odgovaraju stepenima slobode koji su dostupni za elemente koji se koristi za definisanje modela.
- Zapreminskim modelima odgovaraju stepeni slobode u X, Y i Z pravcu. Za površinsku geometriju i drede se dodaju i rotacioni stepeni slobode oko X, Y i Z ose.
- Granični uslovi su uvek definisani u skladu sa stepenima slobode.
- Granični uslovi se mogu primeniti na geometriju modela ili na čvorove u zavisnosti od vrste opterećenja.



5. Opterećenja i ograničenja

Opterećenja koja se najčešće mogu sresti u programskim sistemima baziranim na metodi konačnih elemenata se mogu podeliti u tri grupe:

Globalna opterećenja

- gravitaciono ubrzanje/centrifugalno opterećenje,
- brzina,
- temperatura.

Opterećenja u čvorovima

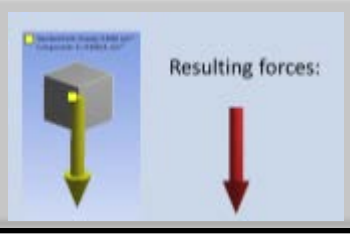
- sila/moment,
- pomeranje,
- brzina,
- temperatura,
- generisana toplota,
- toplotni fluks.

Opterećenja po elementima

- kontinualno,
- pritisak,
- temperatura,
- konvekcija,
- kondukcija,
- radijacija.

5. Opterećenja i ograničenja

- Mnoga opterećenja je moguće definisati preko vektora ili komponeneti vektora.
- Opterećenja mogu imati komponente u pravcima koja su definisana u opštem ili lokalnom koordinatnom sistemu.

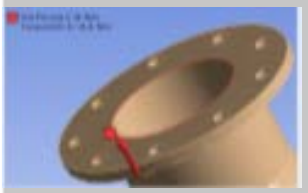
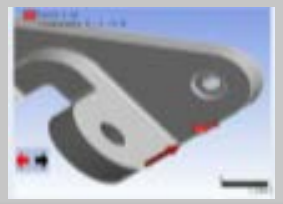
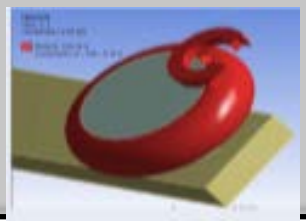
	Ubrzanje (svi delovi)	Sila gravitacije (svi delovi)	Brzina rotacije (selektovani delovi)
Jedinice	Dužina/vreme²	Dužina/vreme²	Rad/sekundi ili o/min
Definsano preko	Komponeneti ili Vektora	U pravcu lokalnog ili globalnog koordinatnog sistema	Komponeneti ili Vektora
Napomena			

Ubrzanje – koristi se kada su poznate vrednosti ubrzanja koje deluje kao opterećenje na sistem.

Gravitacija – kada se želi uključiti uticaj sopstvene težine modela.

Brzina rotacije – uključuje efekat obrtanja predmeta bez ubrzanja.

5. Opterećenja i ograničenja

	Pritisak po površini	Pritisak po liniji	Sila	Moment
Jedinice	N/m^2	N/m	N	Nm
Definsano preko	Komponeneti ili Vektora	Vektora, komponeneti ili tangencijalno (duž linije)	Komponeneti ili Vektora	Komponeneti ili Vektora
Napomena	Pozitivna vrednost deluje na površinu, negativna sa površine 			

Pritisak – površinsko opterećenje koje se koristi npr. U slučajevima analize sudova pod pritiskom.

Sila – vektor silie ili komponeneta koja može delovati na površinu, ivicu ili temena.

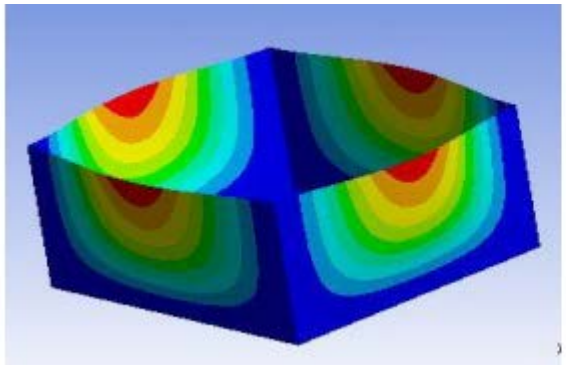
Moment– često se koristi u slučaju torzije (uvrtanja)

5. Opterećenja i ograničenja

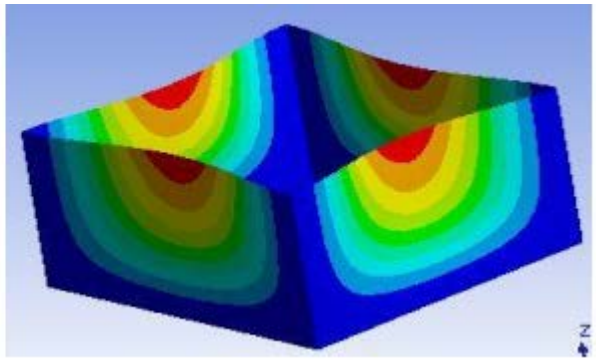
Hidrostatički pritisak – Pritisak izazavn težinom tečnosti

- Primenjuje se kao linearno promenljivo opterećenje na površini radi simulacije delovanja sile fluida na strukturu.
- Može se primenjivati radi simulacije delovanja unutrašnjeg fluida (tećnost unutar posude) ili spoljašnjeg fluida (npr. Potopljeno telo)





Spoljašnji

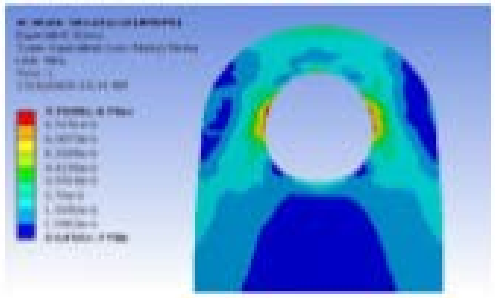


Unnutrašnji

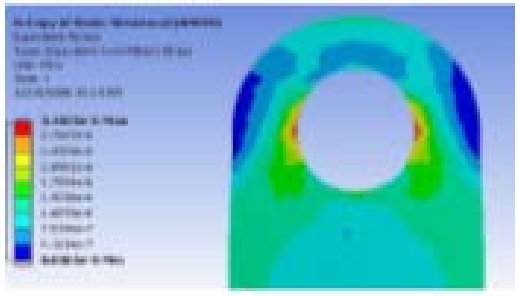
5. Opterećenja i ograničenja

Ležajno opterećenje (Bearing load)

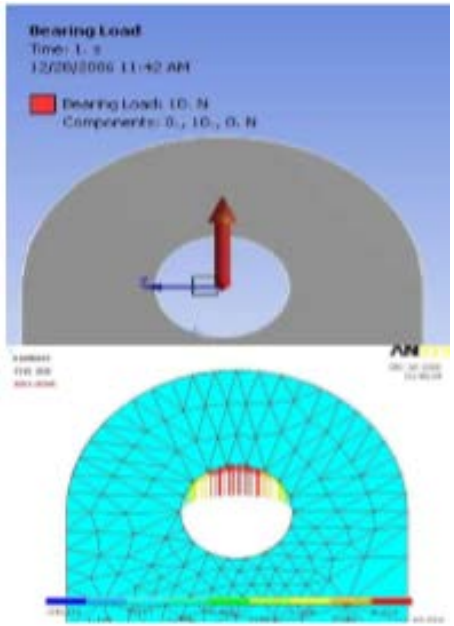
- Opterećenje koje se primenjuje na cilindrične površine sa posebnom raspodelom sila (kompreijom) koje simuliraju neravnomerni pritisak između ležaja i osovine/vratila;
- Nema aksijalne komponetnte;
- Koristi se samo za opterećenje ležaja po cilindričnoj površini.
- Opterećenja ležaja se mogu definisati preko vektora ili komponeneti



Opterećenje ležaja



Opterećenje silom



5. Opterećenja i ograničenja

Opterećenje pomereno iz tačke dejstva (Remote Force)

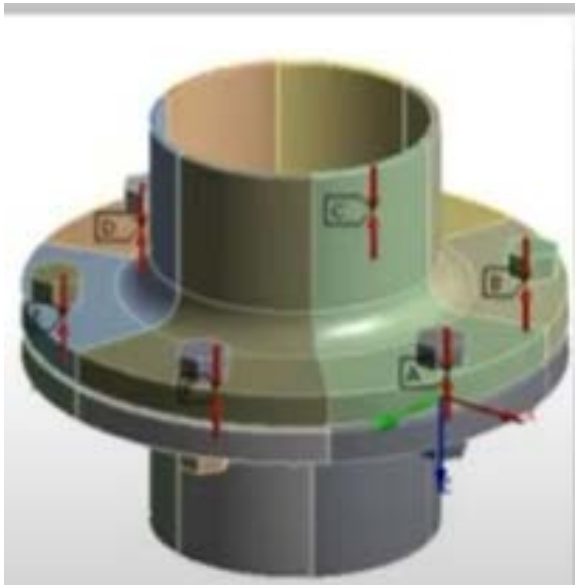
- Primenjuje se kao ekvivalenta sila iil moment na površinu modela.
- Može se definisati kao vektor ili komponeneta.
- Primenjena sila/moment u ovom slučaju deluje van modela, ali je povezana sa modelom.



5. Opterećenja i ograničenja

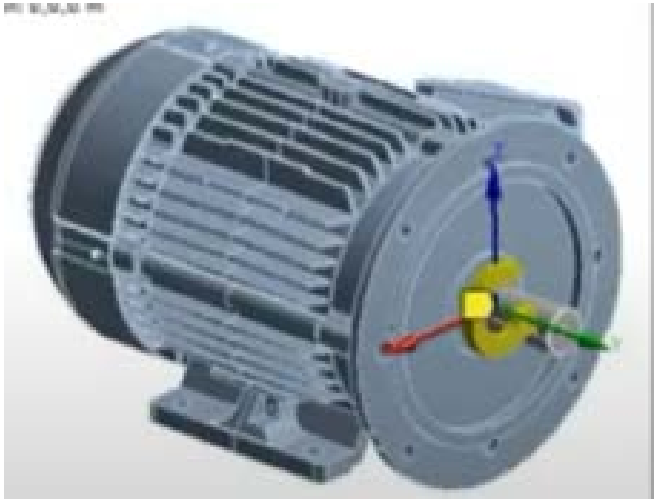
Zatezanje vijka (Bolt pretension)

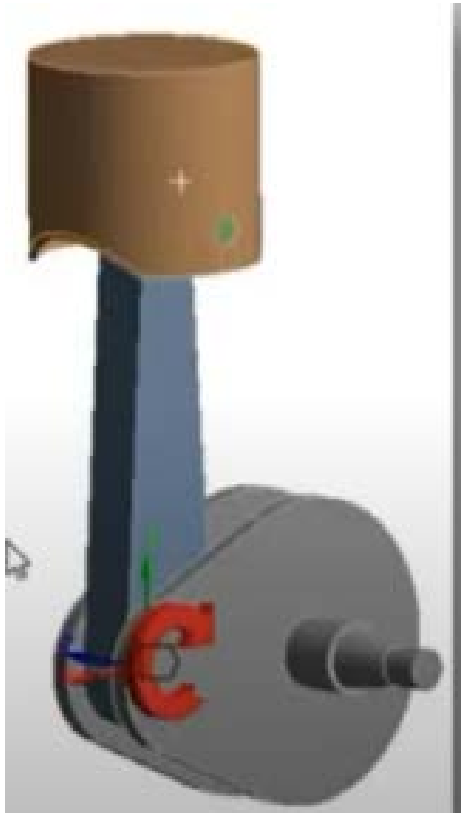
- Primenjuje prednaprezanje (vijci se često zatežu – unapred opterećuju radi povećanja nosivosti) na zapreminski cilindrični presek ili gredu definišući:
  - Silu prednaprezanja iii
  - Podešavanje dužine
- Za opterećenje tela se zahteva lokalni koordinatni sistem (prednaprezanje mora biti u Z pravcu)



5. Opterećenja i ograničenja

- Opterećenja mogu biti u vidu kretanja usled sopstvene frekvencije ili druge spoljašnje pobude, vibracija itd.
- Opterećenja u spoju su obično dinamička opterećenja kao: obrtanje/brzina rotacije, ubrzanje/moment.





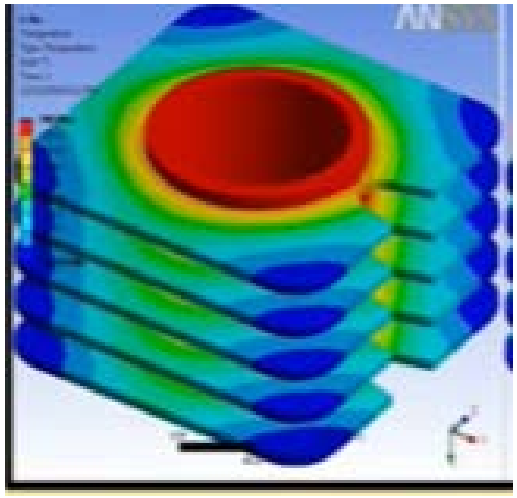
5. Opterećenja i ograničenja

Toplotna opterećenja (uslovi)

$$\varepsilon_{th}^{x} = \varepsilon_{th}^{y} = \varepsilon_{th}^{z} = \alpha\left(T - T_{ref}\right)$$

- Primenjuje se uniformna temperatura u strukturnoj analizi.
- Moraju se navesti referentne temperature koje se mogu odnositi na sva tela ili pojedinačna tela.





5. Opterećenja i ograničenja

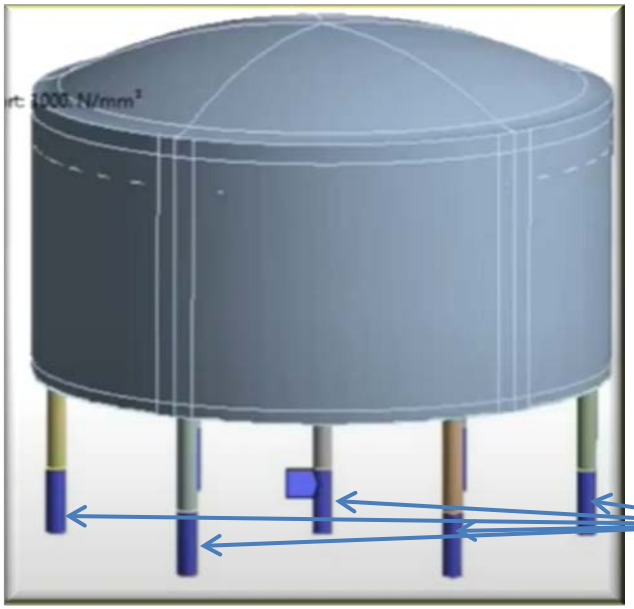
- Oslonci su jedan od najvažnijih aspekata konstrukcije, jer definišu kako se sile unutar konstrukcije prenose ka zemlji ili ka drugim elementima.
- Poznavanje odgovarajućih oslonaca je potrebno pre rešavanja modela, jer nam govori kakvi su granični uslovi (ograničenja).
- Oslonci su kritičan deo svake strukturne analize.
- Strukturni sistemi imaju zavarene spojeve, navojne veze, veze ostvarene čivijama itd.
- Sistemi ili oprema mogu biti oslonjeni elastičnim osloncima, krutim vezama, prigušnicama, oprugama itd.
- Oslonci ili granični uslovi predstavljaju fiksni položaj u statičkoj analizi. Oni se mogu idealizovati na osnovu pravilno izabranih stepeni slobode.
- Kada oslonac ograničava kretanje usled delovanja spoljašnje sile, na osloncima će se javiti sila reakcije.

5. Opterećenja i ograničenja

- **Fiksni oslonac (Fixed Support)**
  - Ograničava sve stepene slobode izabranog entiteta;
    - Zapreminska tela: ograničenje u X, Y i Z pravcu
    - Površinska i linijska tela: ograničenja u X, Y i Z pravcu i rotacije oko X, Y i Z ose.
  - Definiše se na *liniji, u tački ili na površini modela*
- **Slobodni oslonac (Displacement)**
  - Omogućava zadavanje diskretnih vrednosti pomeranjima u X, Y i Z pravcu.
  - Postavljanjem vrednosti na “0” za neki od pravaca znači da je kretanje ograničeno u tom ili tim pravcima. U slučaju ne zadavanja konkretne vrednosti smatra se da je kretanje slobodno - *objekat se kreće kao kruto telo.*
  - Definiše se na *liniji, u tački ili na površini modela*

5. Opterećenja i ograničenja

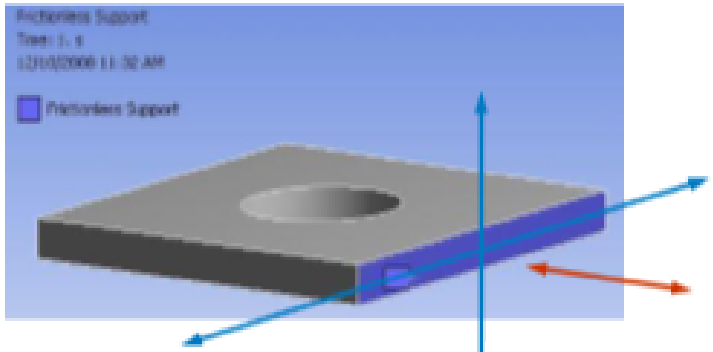
- **Elastični oslonac (Elastic Support)**
  - Ovo ograničenje primenjuje fleksibilni oslonac bez trenja na površinu;
    - Zahteva se definisanje krutosti “temelja”
    - Krutost temelja je pritisak potreban za proizvođenje jediničnog normalnog izvijanja “temelja”
  - Definiše se na *na površini modela*



5. Opterećenja i ograničenja

Oslonac bez trenja (Frictionless Support)

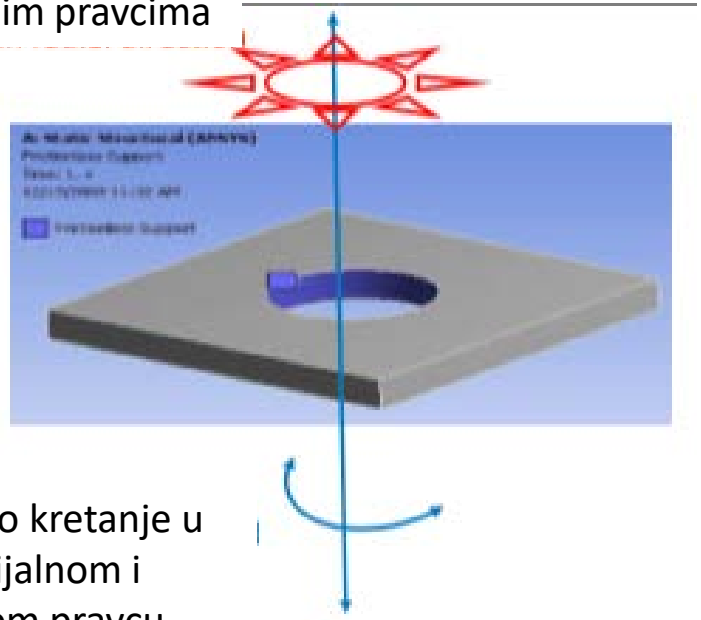
- Primenjuje se za fiksna ograničenja koja su u normalnom pravcu na površinu modela (Oduzima stepene slobode u normalnom pravcu na izabranu površinu).
- Ovo ograničenje se primenjuje kako bi se sprečilo kretanje ili deformisanje površine u normalnom pravcu.



Slobodna translacija u ravni oslonca

Fiksirana translacija van ravni oslonca

Ograničeno kretanje u radijalnim pravcima

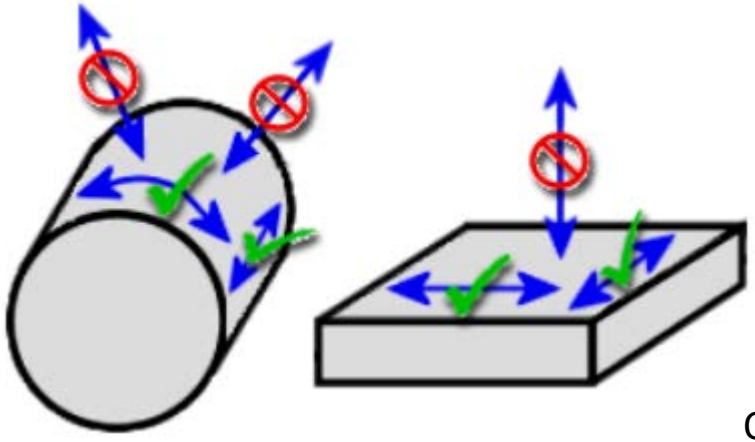


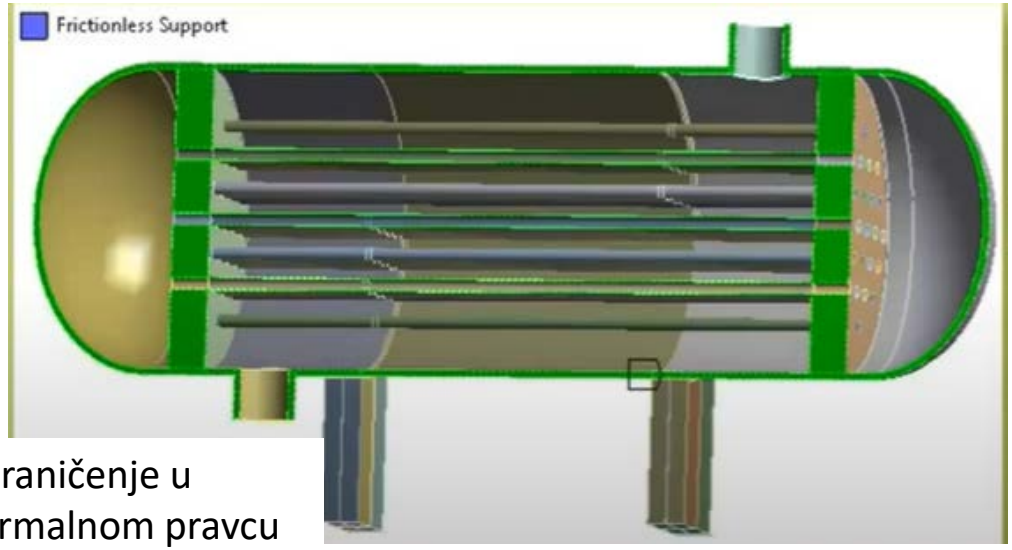
Slobodno kretanje u tangencijalnom i aksijalnom pravcu

5. Opterećenja i ograničenja

Oslonac bez trenja (Frictionless Support)

- Može se koristiti za ravne i cilindrične površine.
- *Ukoliko se primenjuje na ravne površine ovo ograničenje se ponaša kao simetrični granični uslovi, ali ne zahteva postavljanje lokalnog koorinatnog sistema za površine koje nisu usklađene sa opštim koordinatnim sistemom.*



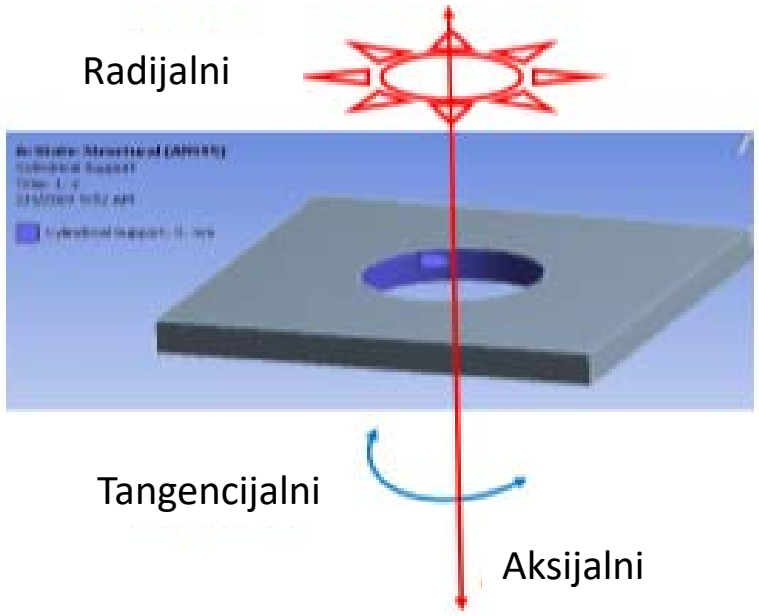


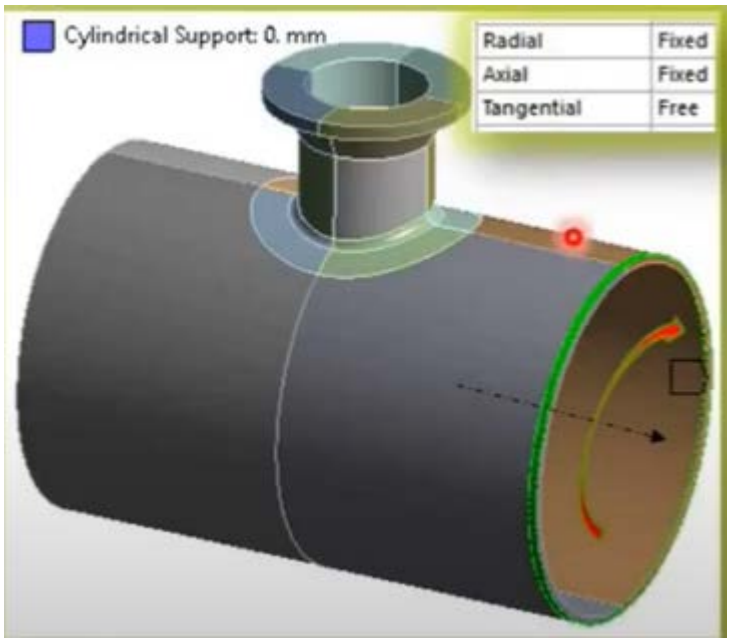
Ograničenje u normalnom pravcu

5. Opterećenja i ograničenja

Cilindrični oslonac (Cylindrical Support)

- Omogućava individualnu kontrolu (fiksirano/slobodno) za aksijalni, radijalni ili tangencijalni pravac .
- **Primenjuje se samo za cilindrične površine**

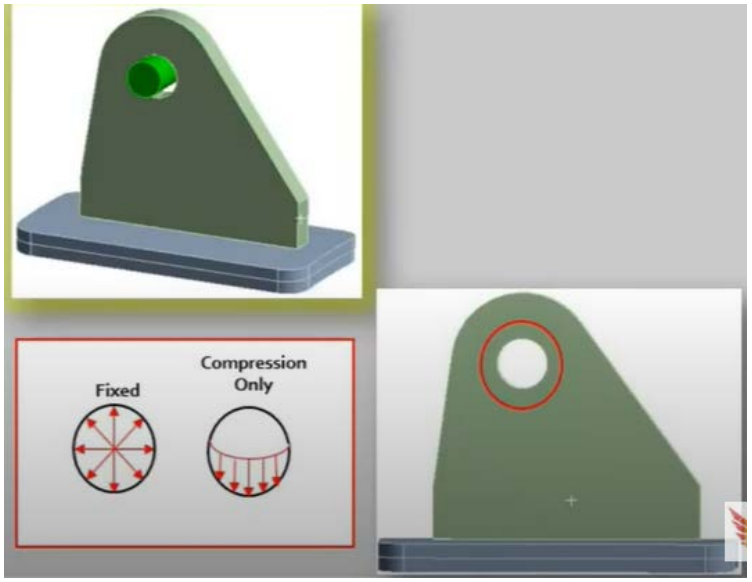


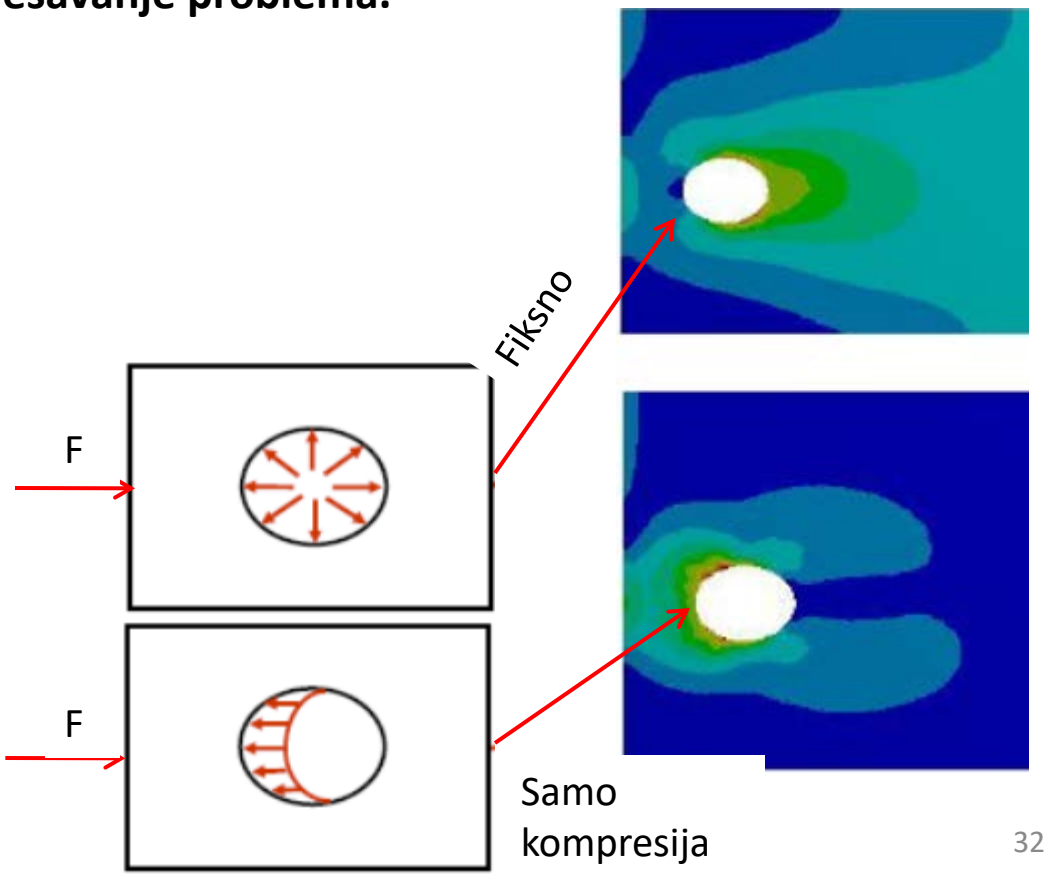


5. Opterećenja i ograničenja

Ograničenje kompresije (sabijanja) (Compresion Only Support)

- Primenjuje ograničenje sabijanja samo u normalnom pravcu.
- **Primenjuje se samo za cilindrične površine zakivki, čivija, navrtke, vijke.**
- **Zahteva iterativno nelinearno rešavanje problema.**



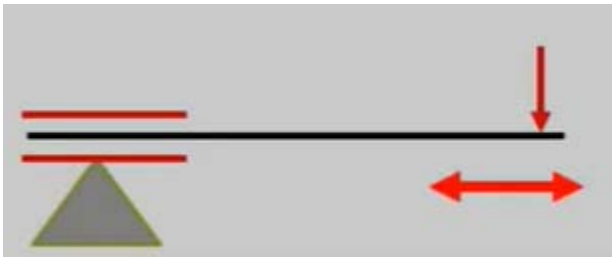


5. Opterećenja i ograničenja

- **Jednostavni oslonac (Simply Support)**
  - Primenjuje se na ivice ili temena površina ili linijskih tela
  - **Ograničava sve translacije ali su sve rotacije slobodne.**
- **Fiksna rotacija (Fiixed Rotation)**
  - Može se primeniti na površine, ivice, temena površina ili linijska tela.
  - **Ograničava rotacije ali su translacije slobodne**



Fiksna translacija



Slobodna translacija



Slobodna rotacija



Fiksna rotacija

6. Procesiranje

- Procesor omogućava rešavanje postavljene relacije za odgovarajuće granične uslove definisane u preprocesoru.
- Današnji programski sistemi bazirani na metodi konačnih elemenata najčešće poseduju primarni (standardni) procesor (solver) koji koristi direktan postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina.
- Dolaženje do tačnog rešenja, primenom konačnog broja operacija i uz zanemarivanje greške zaokruživanja, zasnovano je na Gausovom postupku rešavanja sistema linearnih jednačina.
- Pored toga, programski sistem poseduje i procesore (solvere) koji koriste iterativne postupke rešavanja postavljenog sistema linearnih jednačina, kao što su: JCG solver i PCG solver.
  - *JCG solver* (*Jacobi Conjugate Gradient*)-koji koristi Jakobijev postupak sa konjugovanim gradijentom.
  - *PCG solver* (*Preconditioned Conjugate Gradient*)-koji funkcioniše slično JCG solveru, s tim da je četri do deset puta brži kada su u pitanju zapreminski konačni elementi za statičku analizu, a oko deset puta je brži kod elemenata tipa ljuske.

7. Postprocesiranje – Prikaz izlaznih informacija

- Postprocesiranje predstavlja proces vizuelizacije dobijenih rezultata.
- Pri postprocesiranju podaci se mogu prikazati u dva oblika: **numeričkom i grafičkom.**
- **Struktura rezultata sadrži:**
  - Ukupna pomeranja i pomeranja u pravcima koordinatog sistema.
  - Komponenete napona, glavne napone i deformacije ili izvedena njihova rešenja.
  - Rešanja kontaktnih analiza
  - Sile reakcija, itd.
- Grafički prikaz rezultata je u vidu kontrunog ili vektorskog prikaza deformisane geometrije modela

7. Postprocesiranje – Prikaz izlaznih informacija

- Pomeranja na modelu mogu biti prikazana kao:
  - Ukupna pomeranja u vidu skalarne veličine

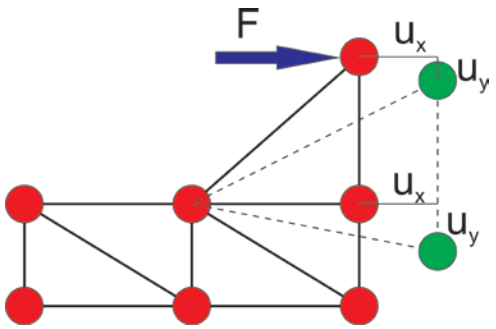
$$U_{ukup.} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$$

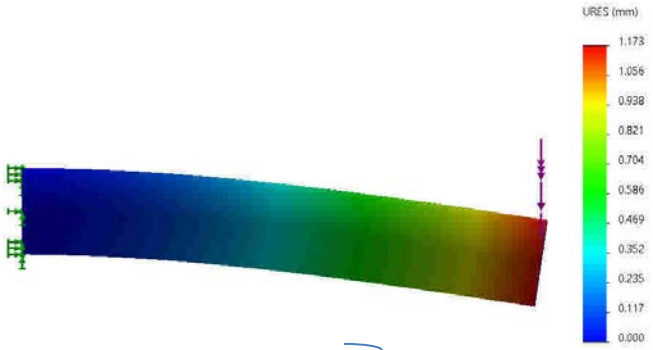
  - X, Y, i Z komponente pomeranja u opštem ili lokalnom koordinatnom sistemu.
- Naponi i deformacije:
  - Naponi i (elastične) deformacije, komponenete mogu biti prikazani kao normalni (X, Y i Z), ekvivalentni ili smičući (XY, YZ i XY) .
  - Glavni naponi su uvek raspoređeni tako da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
  - Intenzitet napona je definisan kao najveća apsolutna vrednost :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \quad |\sigma_3 - \sigma_1|$$

7. Postprocesiranje – Prikaz izlaznih informacija

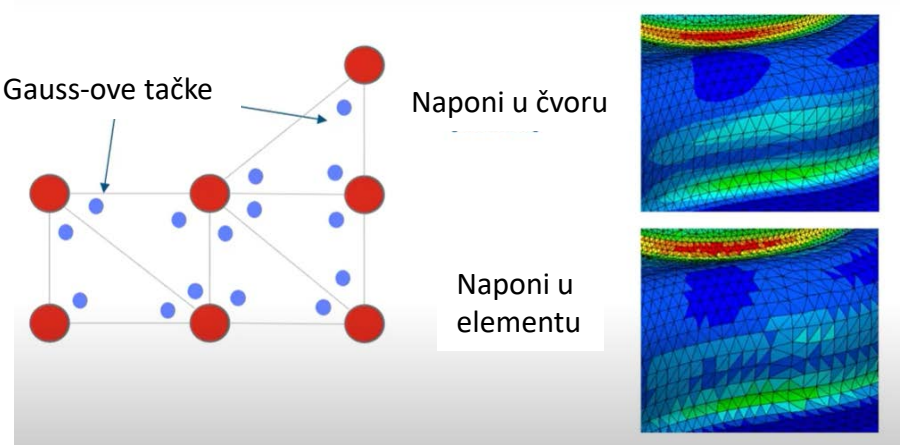
- Pomeranja se **određuju u čvorovima** i to su **primarna rešenja.**





- Napon i deformacije u čvorovima je srednja vrednost oko Gauss-ovih tacaka
- Napon i deformacije u elementu je srednja vrednost elementa Gauss-ovih tacaka

Izvedena rešenja na bazi interpolacije



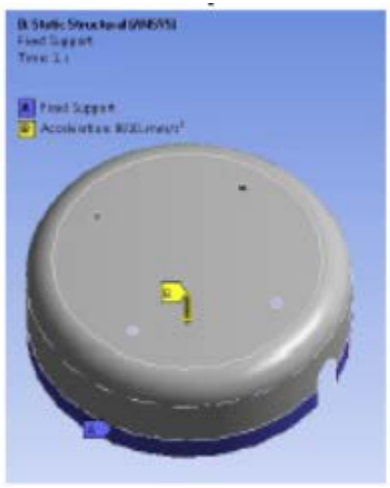
7. Postprocesiranje – Prikaz izlaznih informacija

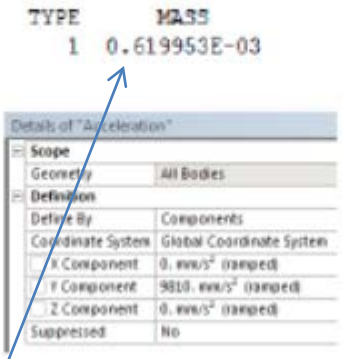
- Određivanje stepena sigurnosti se zasniva na nekoliko teorija o otkazu materijala:
- Teoriji plastičnosti
  - Maksimalni ekvivalentni napon
  - Maksimalni napon smicanja
- Teoriji zamora materijala
  - Mohr – Coulomb-ov napon
  - Makimalno naprezanje

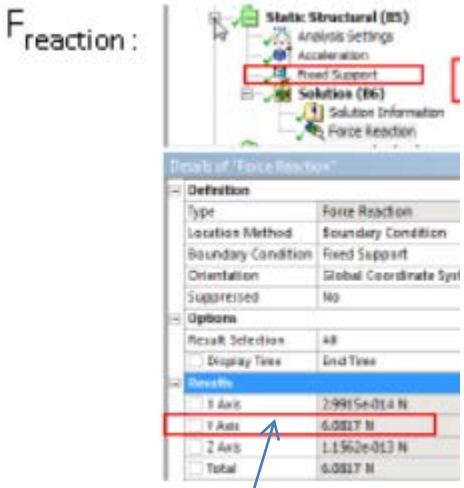
7. Postprocesiranje – Prikaz izlaznih informacija

- Nakon pregleda svih rešenja, veoma je važno izvršiti validaciju rezultata. Jedan od najčešćih prilaza je da se verifikuje statička jednačina ravnoteže:

$F_{primenjeno} = F_{sila\ reakcije}$



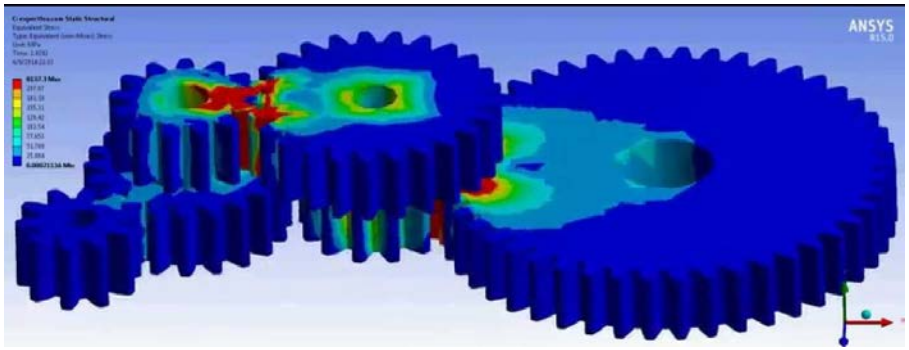


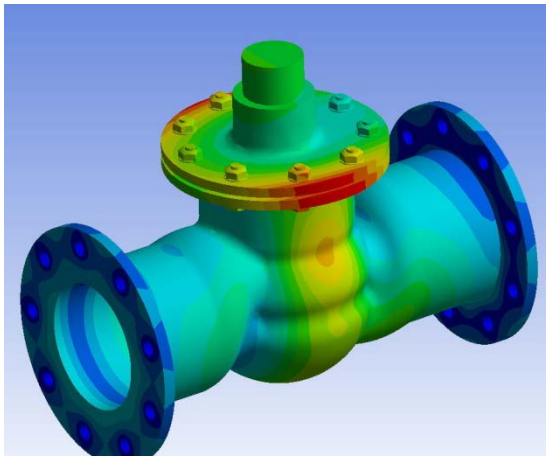


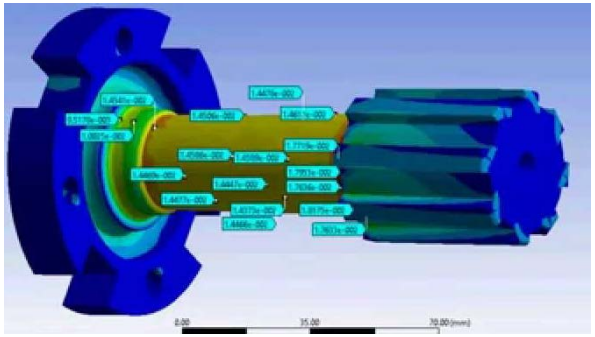
$$F_y = m \cdot a = 0{,}62g \cdot 9{,}81m/s^2 = 6{,}082\ N = Sili\ reakcije$$



5. STATIČKA ANALIZA U MKE

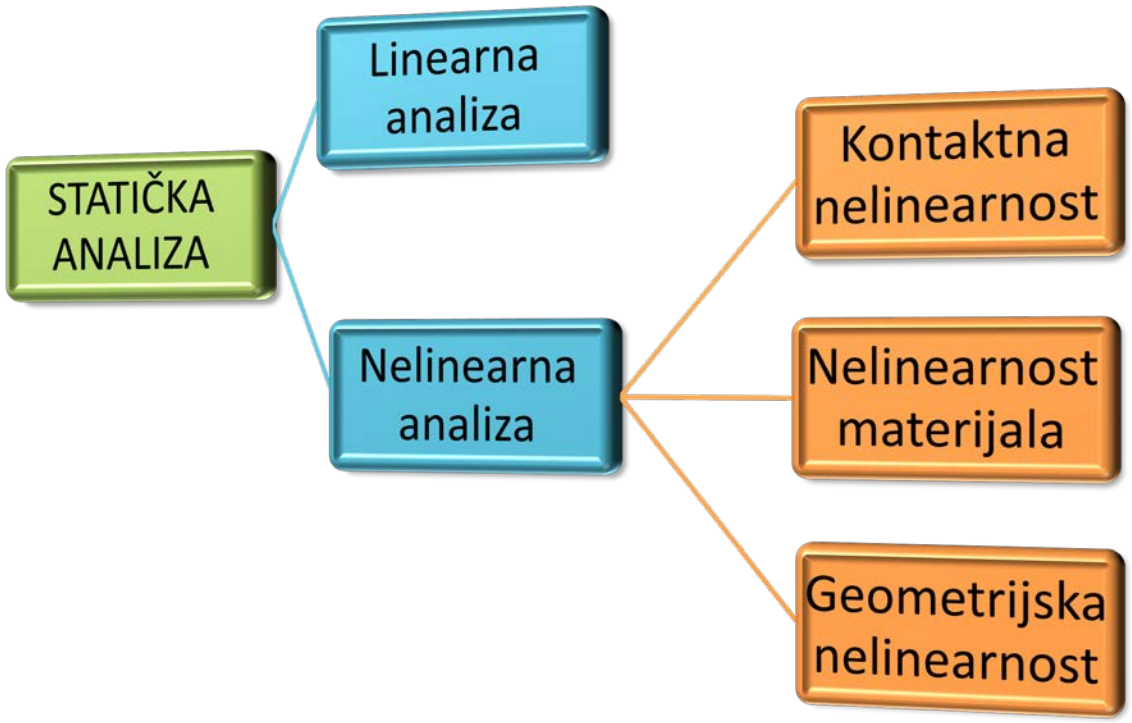






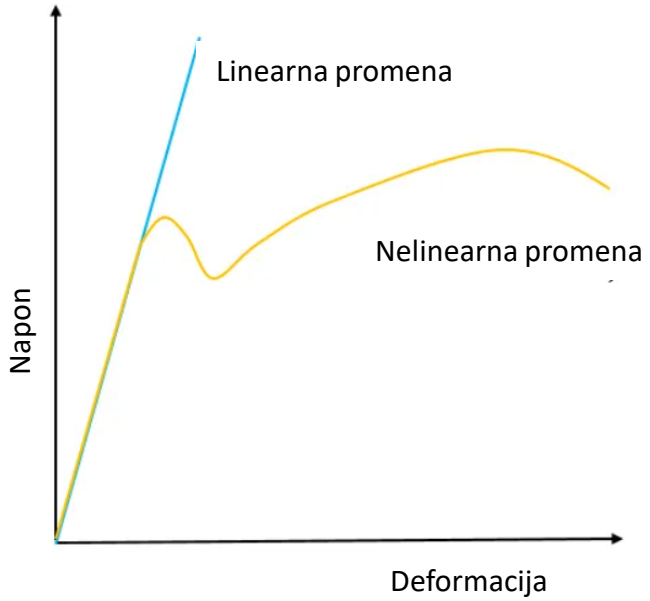
Statička analiza u MKE

- Analiza statičkog ponašanja služi da se odrede pomeranja, naponi, deformacije i sile u skopovima ili komponenetama usled opterećenja koje nije prouzorkovano inercijalnim silama i nema efekta prigušenja.
- Opterećenje koje deluje i odziv strukture se ne menja ili se veoma sporo menja sa vremenom.



1. Statička linearna analiza

- Prilično je jednostavna (ali najčešće korišćena) u poređenju sa drugim tipovima analize.
- **Linearna**, znači da solver koristi linearnu promne između deformacija i napona, i
- **Statička,** znači da nema promene uslova (opterećenja) tokom vremena.



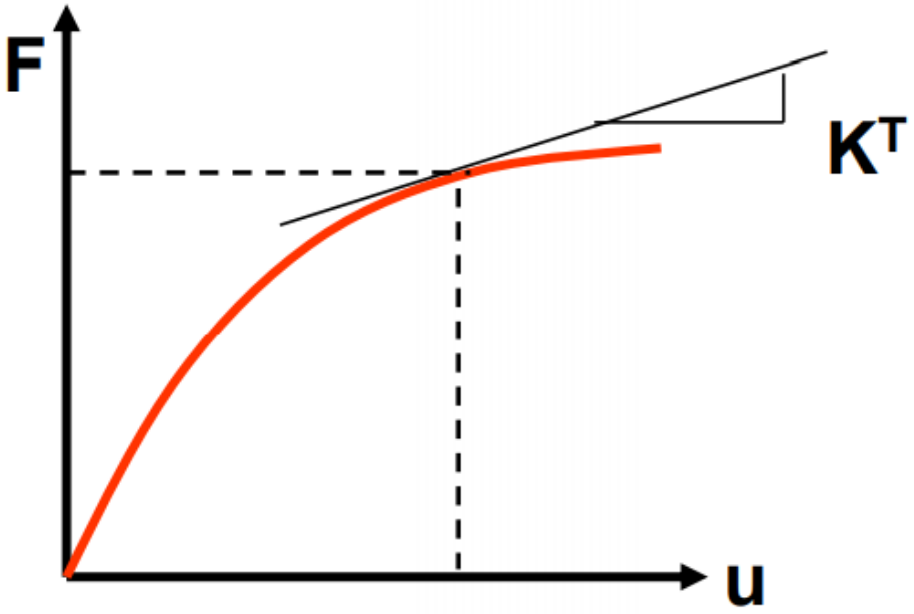
- Linearnom analizom se može identifikovati mesto i vrednost (intenzitet) velikih napona, a na osnovu toga konstatovati da će doći do plastičnih deformacija ili loma materijala.
- Na osnovu toga, se zaključuje da je do otkaza došlo prema kriterijumu granice tečenja ili maksimalnih napona za izabrani materijal (npr. vrednosti napona iz analize prelaze napon tečenja za posmatrani materijal – doći će do plastičnih deformacija).

1. Statička linearna analiza

- Numerički metod se koristi za rešavanje vektora pomeranja, na osnovu matrice krutosti i vektora sila.
- Matrica krutosti je singularna, dok se ne primeni neki od graničnih uslova, kako bi se izbeglo kretanje krutog tela.
- Nepoznata pomeranja se rešavaju Gauss-Seidel-ovom metodom ili Gausovom metodom eliminacije korišćenjem direktnog solvera.
- Za određivanje napona se koristi Hukov zakon ($\sigma = \varepsilon * E$).
- Pretpostavlja se da su deformacije u opsegu elastičnosti materijala i da su naponi linearna funkcija deformacija (zbog nelinearnosti ne dolazi do velikih deformacija).
- Naponi se izračunavaju uu čvorovima , a odgovarajuća interpolaciona funkcija se koristi za određivanje napona, deformacija na linijama, površinama ili zapreminama modela.
- Linearna statička analize se najčešće koristi zbod brzog odziva i nedostupnosti podataka vezanih za nelinearnost materijala.
- Koristi se u mnogim industrijama kao što su: automobilska, avio, industrija nafte i gasa, gradjevinarstvu, itd.

2. Statička nelinearna analiza

- Nelinearnost je veoma važan pojam u metodi konačnih elemenata.
- Samo promena linearne u nelinearnu zonu nije dovoljna.
- Nelinearno, znači da sila nasuprot pomeranju nije prava linija, sila se menja tokom vremena.
- Krutost konstrukcije više nije konstantna, već varira s obzirom na opterećenje i predstavlja tangentu na krivu sila – pomeranje u određenoj tački.



2. Statička nelinearna analiza

- Za strukturu se kaže da je nelinearna, ako opterećenje uzrokuje značajne promene krutosti.
- Tipični razlozi za promene krutosti su:
  - Marerijal se ne ponaša u skladu sa Hukovim zakonom, i plastično se deformiše nakon granice elastičnosti.
  - Velike deformacije usled malih ili velikih opterećenja.
  - Nagla promena u kontaktima između analiziranih komponeneti.

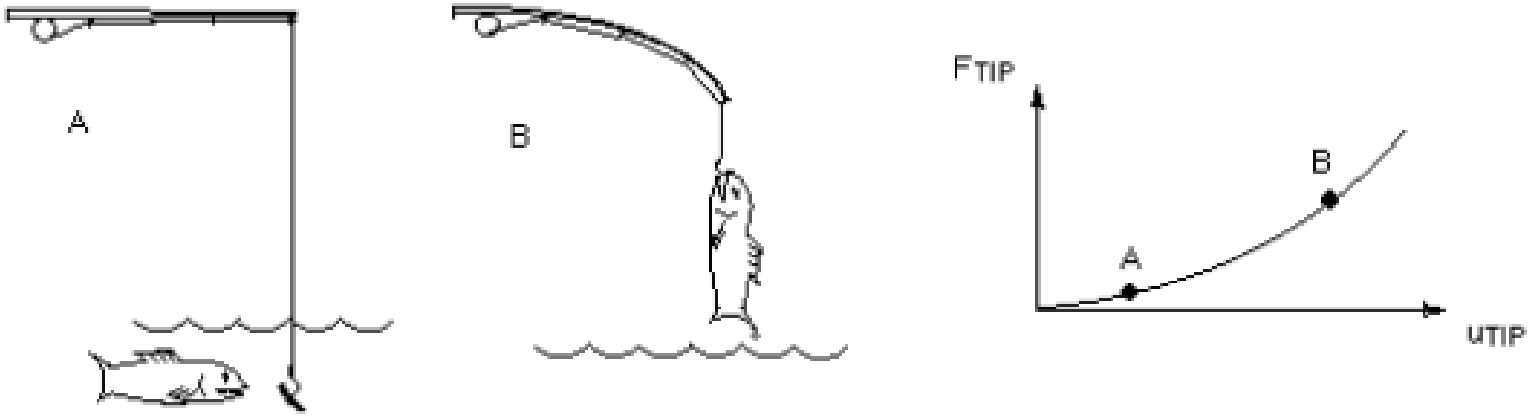






2. Statička nelinearna analiza – Geometrijska nelinearnost

- Geometrijske nelinearnosti se odnose na geometrijske promene i odstupanja geometrije.
- Promenljiva geometrijska konfiguracija usled velikih deformacija (Large strain) konstrukcije uzrokuje nelinearno ponašanje.
- Geometrijska nelinearnost nastaje i usled velikih napona (Naponskih kretanja-Stress stiffening) i rotacija (Large rotation).

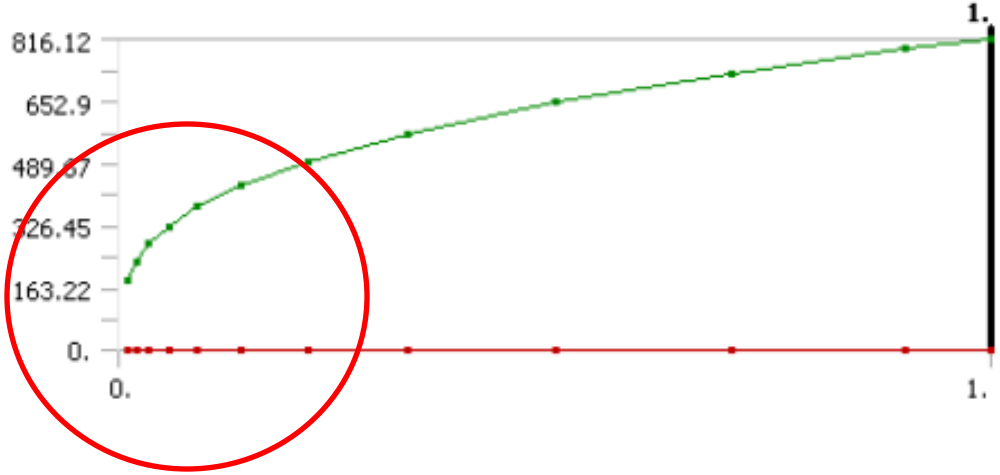


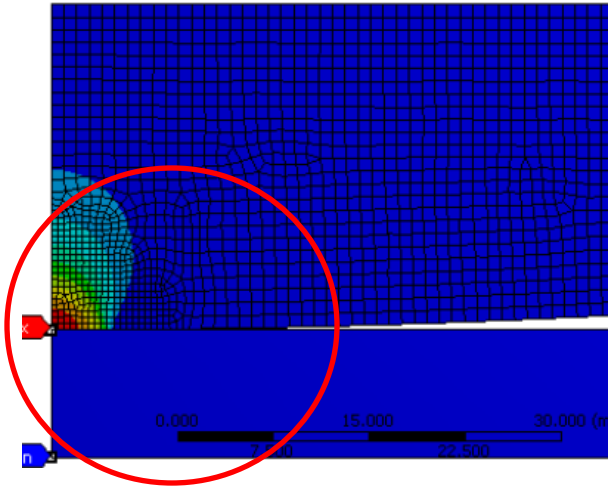
2. Statička nelinearna analiza – Nelinearnost u materijalu

- Nelinearnosti u materijalu ispoljavaju nelinearne relacije između napona i deformacija, tako da je napon nelinearna funkcija deformacije.
- Nelinearna kriva pomaže u određivanju tačnog napona u odnosu na deformaciju nakon granice tečenja.
- Programski sistemi obuhvataju sledeće nelinearnosti u materijalu:
  - Nelinearna elastičnost (Nonlinear elastic)
  - Hiper-elastičnost (Hyperplastic)
  - Linearno elastično –idealno plastično (Linear elastic perfectly plastic)
  - Elastično – idealno plastično (Elastic perfectly plastic)
  - Puzanje (Elastic time dependent plastic (creep))

2. Statička nelinearna analiza – Nelinearnost u kontaktu

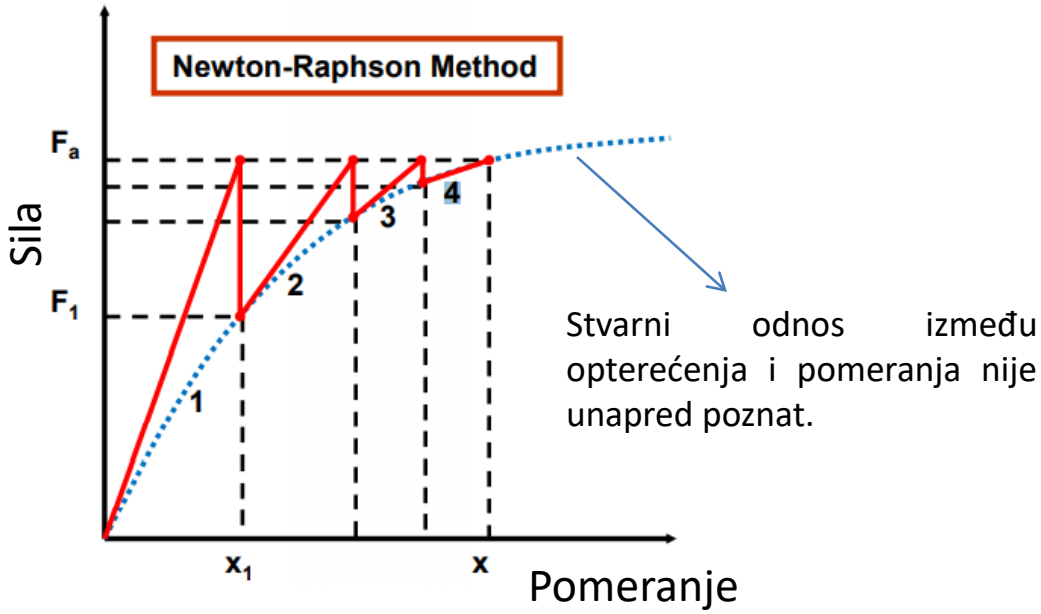
- Nelinearnost u kontaktu se ogleda u nagloj promene krutosti kada tela ulaze ili izlaze iz zone kontakta.
- Ovaj tip nelinearnosti koristi se za simulaciju zazora između dva dela.





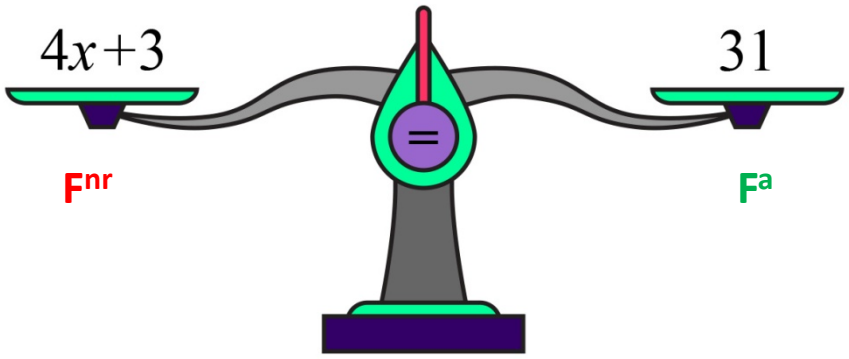
3. Nelinearno rešavanje korišćenjem linearnog solvera

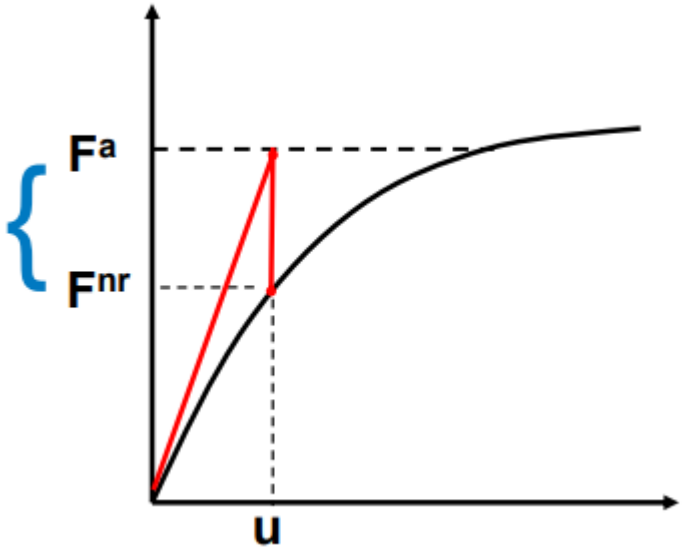
- U nelinearnoj analizi, odgovor se ne može predvideti direktno pomoću skupa linearnih jednačine.
- Nelinearna struktura se može analizirati pomoću iterativnog niza linearnih aproksimacija, sa korekcijama.
- Programski sistemi koristi iterativni postupak tzv. Newton-Raphson-ovu metodu. Svaka iteracija je poznata kao iteracija ravnoteže.



3. Nelinearno rešavanje korišćenjem linearnog solvera

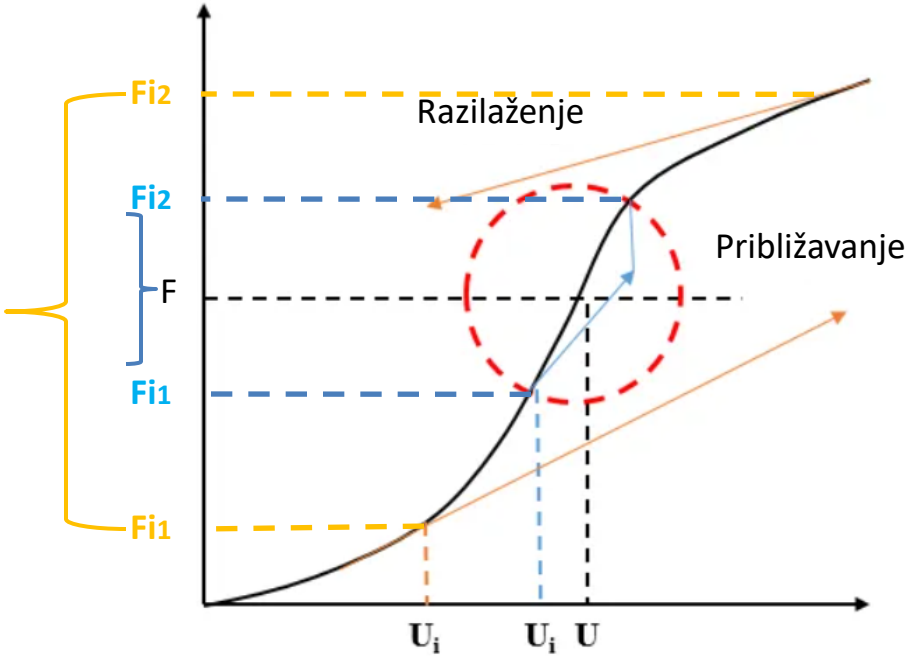
- Pri ovoj metodi rešavanja pojaviće se razlika unutrašnjih opterećenja (F^a - F^{nr}) koja se naziva ostatak.
- Ostatak je mera neravnoteže sila u strukturi.
- Cilj je ponavljanje (iteracije) rešavanja dok ostatak ne postane prihvatljivo mali, odnosno dok rešenje ne konvergira ka 0.
- Kada se postigne konvergacije, rešenje je u ravnoteži – unutar prihvatljivih granica.





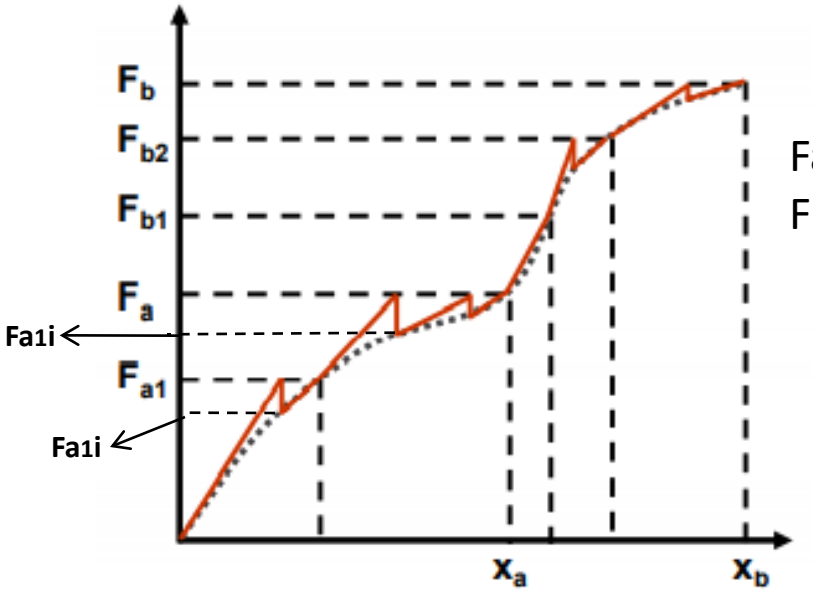
3. Nelinearno rešavanje korišćenjem linearnog solvera

- Pri rešavanju Newton-Raphson-ovu metodom se ne garantuje da će rešenje konvergirati u svim slučajevima.
- Rešenje će konvergirati ka nuli samo ako je početno podešavanje unutra radijusa konvergencije.
- Kada se pomeranje (Ui) nalazi unutra radijusa konvergencije, rešenje sistema će konvergirati (približavati se nuli), ali kako se pomeranje Ui udaljava od radijusa konvergencije, onda rešenja ne kovergitaju, već počinju da se razliaze.



3. Nelinearno rešavanje korišćenjem linearnog solvera

- Da bi se dobilo da rešenje kovergira ka nuli postoje dve metode:
- Postepeno primenjivati opterećenje pomerajući cilj bliže početku;
  - Zadavati opterećenje u koracima – različita promena u opštem opterećenju.
  - Zadavati opterećenja u podkoracima – opterećenje se primenjuje postepeno
- Koristiti odgovarajuće alate u programskim sistemima kako bi se povećao radijus konvergencije



Fa – podeljenja u dva podkoraka
Fb – podeljena u tri podkoraka

3. Nelinearna analiza – Problemi za rešavanje

- Pri nelinearnoj analizi postoje tri glavna pitanja koja treba rešiti:
  - Dobijanje konvergencije
  - Balansiranje između cene i tačnosti
  - Verifikacija rešenja



3. Nelinearna analiza – Dobijanje konvergencije

- Pri nelinaranoj analizi rešenje mora početi unutar radijusa konvergencije!!!!!!
- Radijus konvergencije je nepoznat?????
  - ako rešenje konvergira, početak je unutar radijusa
  - ako rešenje ne konvergira rešenje je van radijusa
- Ponekad su potrebne (zahtevaju) metode “pokušaj – greška” = ISKUSTVO I TRENING

- Složeni problemi mogu zahtevati veliki broj koraka povećanja opterećenja, i mnoo iteracija za svaki korak povećanja da bi se postigla konvergencija.
- U slučaju većeg broja iteracija, povećava se opšte vreme potrebno za rešavanje problema

3. Nelinearna analiza – Cena, vreme, tačnost

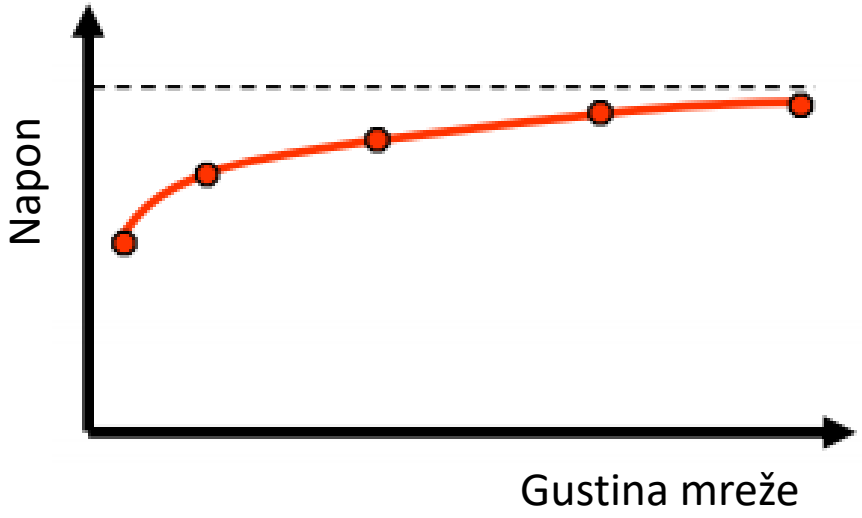
- Svi programski sistemi za MKE analizu uključuju kompromis između troškova (potrebnog vremena za analizu, kapacitetea diska i zahteva za memorijom) i tačnosti.
- Više detalja na modelu i gušća mreža elemenata uglavnom dovode do tačnijeg rešenja ali zahtevaju više vremena i hardverskih resursa.
- Nelinearne analize dodaju dodatni faktor u vidu broja inkrementa (koraka) opterećenja koji utiče na tačnost i cenu (u smislu vremena i potrebnih hardverskih resursa).
- Drugi nelinearni parametri kao što je kontakt dva tela, takođe utiču na tačnost i cenu.

3. Nelinearna analiza – Verifikacija

U nelinearnoj analizi, kao i u bilo kojoj analizi konačnih elemenata, moraju se verifikovati rezultati.

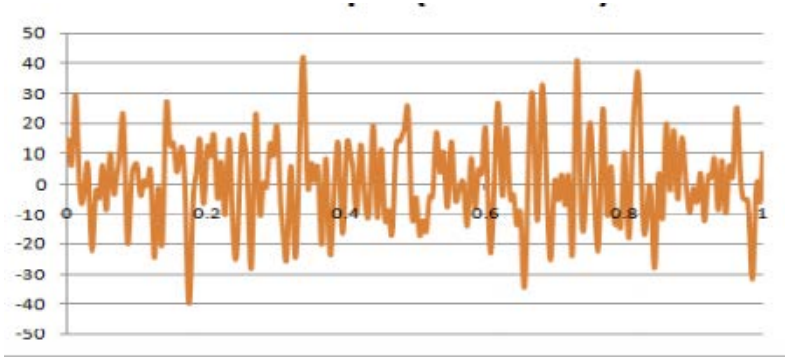
- Zbog povećane složenosti nelinearnog ponašanja, nelinearni rezultati su generalno teže proverljivi.

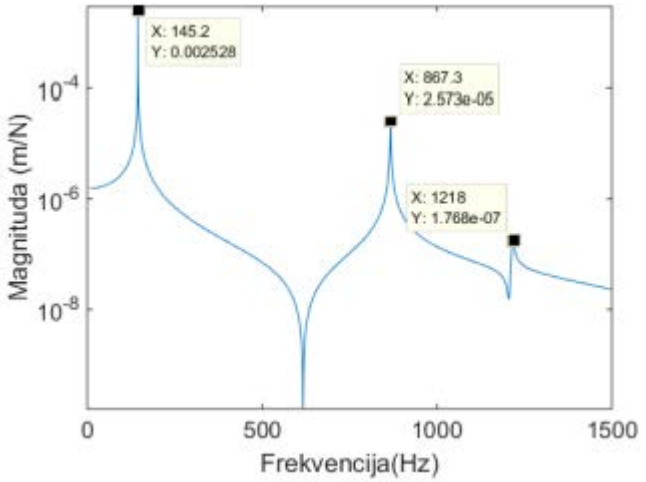
- Studije osetljivosti (povećanje gustine mreže, smanjenje broja koraka povećanja opterećenja, promenljivost ostali parametri modela) postaju skuplji (vreme, povećanje hardverskih resursa itd.).

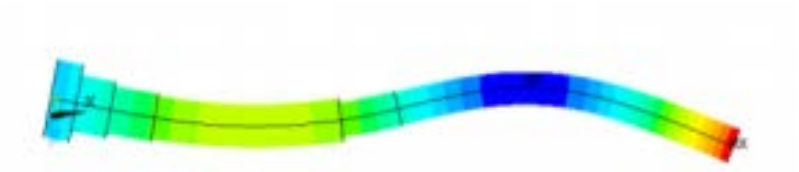




6. DINAMIČKA ANALIZA U MKE







Dinamička analiza u MKE

- Koristi se za određivanje ponašanja strukture pod opterećenjima koja zavise od vremena ili frekvencija (učestalosti).
- Kod ovih analiza sile inercije i/ili mogućnost pojave prigušenja igraju značajnu ulogu.
- Dinamička analiza takođe uključuje proučavanje slobodnih vibracija tj. oscilovanje konstukcije nakon prestanka dejstva sile.
- Pri ovim analizama obično se uzima u obzir dinamičko ponašanje usled sledećeg:
  - Slobodnih vibracija (sopstvene frekvencije i oblici oscilovanja)
  - Prinudnnih vibracija (npr. vibracije nastale usle obrtnih elemenata)
  - Seizmičkih aktivnosti/Udarnih opterećenja (npr. zemljotresi, eksplozije)
  - Slučajnih (nasumičnih) vibracija (npr. drumski transport)
  - Vibracija usled opterećenaja koja su promenljiva tokom vremena (sudar, udarac čekićem itd.)
- Svaka situacija se rešava određenim tipom dinamičke analize.
- Izbor odgovarajućeg tipa dinamičke analize zavisi od vrste ulaznih podataka, kao i vrste željenog rezultata.

1. Tipovi dinamičke analize

Tip analize	Ulaz	Izlaz	Neline - arnost
Modalna	-	▪ sopstvene frekvencije i glavni oblici oscilovanja ▪ profil napona/deformacija	Ne
Harmonijska	sinusoidna pobuda u opsegu traženih frekvencija	▪ sinusoidni odziv na svakoj frekvenciji ▪ min/max odziv u definisanom opsegu frekvencija	Ne
Spektralna	spektar koji predstavlja odgovor na određenu vremensku pobudu (Amp./Hz)	maksimalni odziv tokom vremena	Ne
Nasumične vibracije	Spektar snage, predstavljen kao rapodela verovatnoće pobude (PSD, Amp^2/Hz)	verovatnoća raspodele odziva	Ne
Nestacionarna	Opterećenja promenljiva u vremenu (s, ms)	Vremensko promnljiv odziv	Da

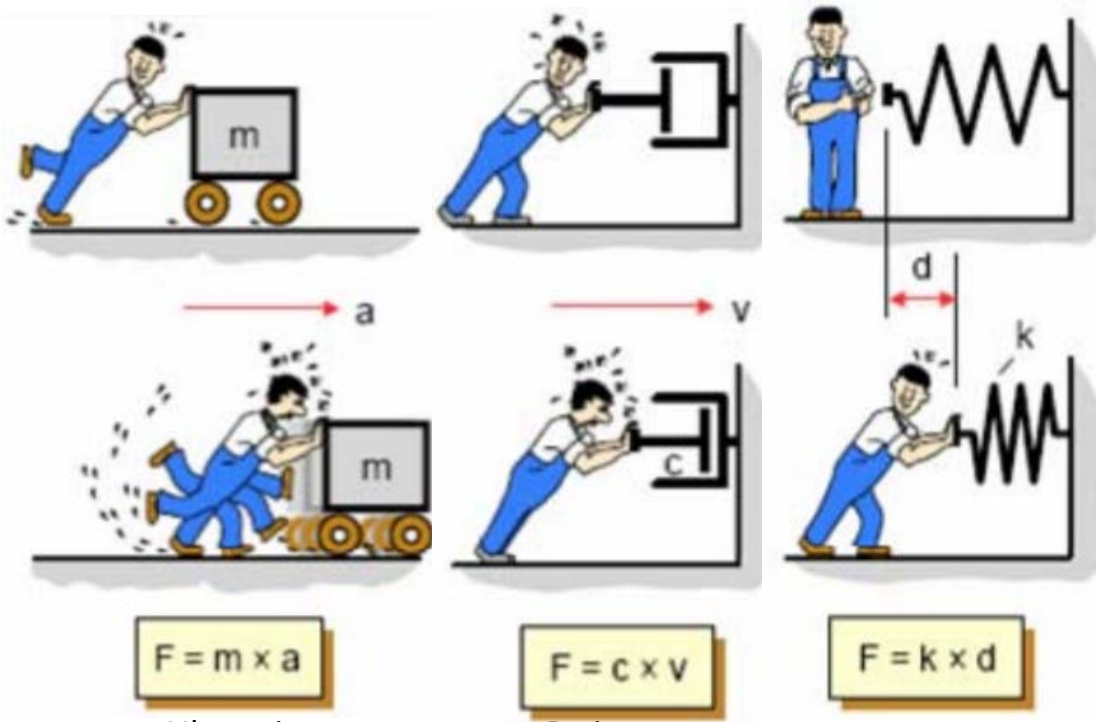
2. Opšta jednačina kretanja

- Nelinearna jednačina kretanja za nestacionarnu dinamičku analizu (**opšta jednačina**)

Nelinearno

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K(u)]\{u\} = \{F(t)\}$$

Inercija **Prigušenje** **Krutost** **Primenjena sila**



3. Modalna analiza

- Modalna analiza se koristi za određivanje sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja linearnih elastičnih struktura.
- Osnovni tip dinamičke analize jer:
  - omogućava da se pri projektovanju izbegne rezonancija ili da struktura vibrira na određenim frekvencijama,
  - se može zaključiti kakve će projektovana struktura da ima na različite vrste dinamičkih opterećenja,
  - pomaže u određivanju kontrolnih rešenja (granica-opsega frekvencija) za druge tipove dinamičke analize
- Modalna analiza je osnova za određivanje integracionih vremenskih koraka u analizi tranzijentnog odgovora ili analizi frekventnog odgovora.
- **Pretpostvake:**
  - **Struktura je linearna (npr. [M] i [K] su konstantne).**
  - **Nema spoljašnjeg opterećenja.**

3. Modalna analiza bez prigušenja

- Linearna jednačina kretanja za slobodne neprigušene vibracije je:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

- Za linearne sisteme, slobodne oscilacije biće harmonijske u formi:

$$\{u\} = \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

$$\{\ddot{u}\} = -\omega_i^2 \{\phi\}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

- Svakoj sopstvenoj vrednosti, koja je proporcionalna **sopstvenoj frekvenciji**, postoji odgovarajući **sopstveni vektor**, ili **oblik oscilovanja - mod**.
- Modalna analiza za neprigušeno slobodno oscilovanje daje sopstvene frekvencije prema:

$$\left([K] - \omega_i^2 [M]\right)\{\phi_i\} = 0$$

ω_i - *i* –ta sopstvena kružna frekvencija (rad/s)

ϕ_i - sopstveni vektor modova oscilovanja *i*-te sopstvene frekvencije

Sopstvena vrednost i kružna frekvencija oscilovanja imaju međusobnu vezu:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad [Hz]$$

3. Modalna analiza bez prigušenja

$$\left(\left[K\right]-\omega_i^2\left[M\right]\right)\left\{\phi_i\right\}=0$$

- Ova jednakost je zadovoljena ako:

a) $\phi_i = 1$ - Prosto rešenje, ne podrazumeva vibracije

b) ili ako je $\det\left(\left[K\right]-\omega_i^2\left[M\right]\right)=0$

- Ovo je problem sopstvenih frekvencija oscilovanja, koji se može rešiti za svaki koren ω^2_i
- Rešenje detrminante $\omega_i^2=0;\ \ \omega_{3/4n}^2=2-\sqrt{2};\ \omega_{5/6n}^2=2;\ \ \omega_{7/8n}^2=2+\sqrt{2}$ predstavlja polove, odnosno rezonantnu frekvenciju sistema (za sistem sa četiri stepena slobode).
- Za svaku od dobijenih frekvencija postoji vektor oblika oscilovanja ($\{\phi\}_1$, $\{\phi\}_2$,..... $\{\phi\}_n$) koji određuje pomeranje svakog od stepeni slobode na datoj frekvenciji .

3. Modalna analiza bez prigušenja

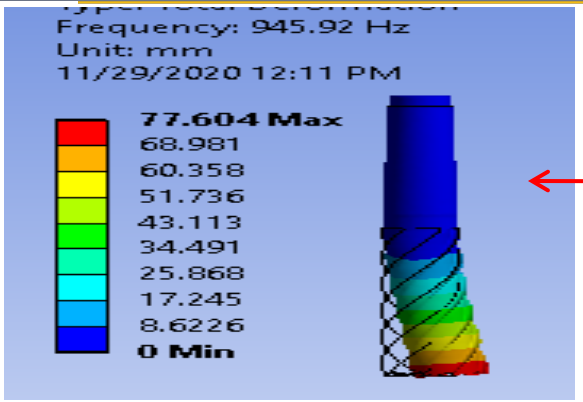
- U modalnim analizama je:
  - Soptvena vrednost (eigenvalues) – kvadrat sopstvene kružne frekvencije (ωi)
  - Sopstveni vektor (eigenvectors) – odgovarajući oblik oscilovanja (ϕi)
- S obzirom da vektori oblika oscilovanja predstavljaju odnose amplituda, dakle ne predstavljaju amplitude u apsolutnim vrednostima, potrebno je izvršiti njihovu normalizaciju.
- Postoji više tehnika normalizacije (mase, krutosti..), u programskim sistemima na bazi konačnih elemenata se obično koristi normalizacija u odnosu na masu.

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1$$

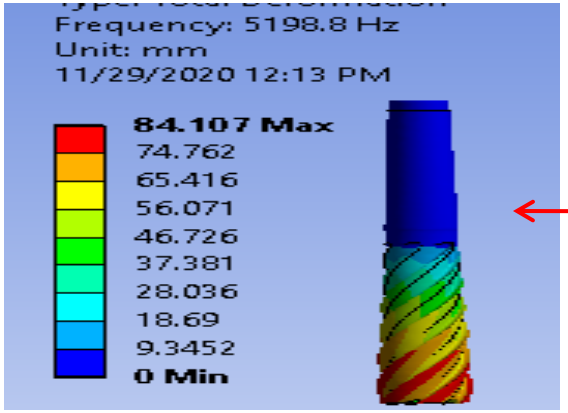
- Zbog ove normalizacije samo rešenja oblika za odgovarajuće stepene slobode imaju stvarno značenje.

3. Modalna analiza bez prigušenja

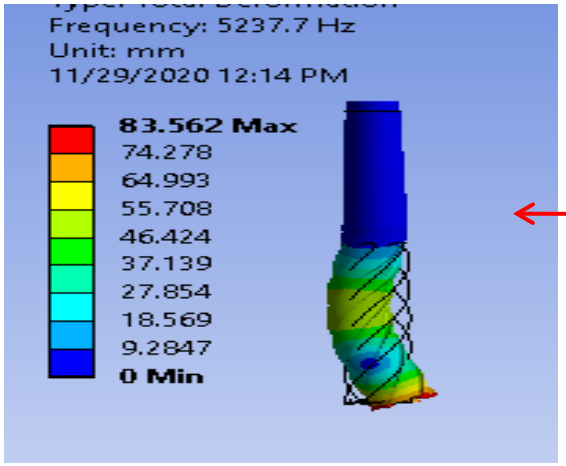
- Kvadratni koreni sopstvenih vrednosti su soptvene kružne frekvencije (rad/s).
- Sopstvene frekvencije *fi* se mogu izračunati kao: $fi = \omega i/2\pi$ (Hz)
- Sopstveni vektori ϕi predstavljaju oblike oscilovanja, npr. oblik pretpostavljen pri vibracijama na frekvenciji *fi*



Mod 1
$\{\Phi\}_1$
$f_1 = 945$ Hz



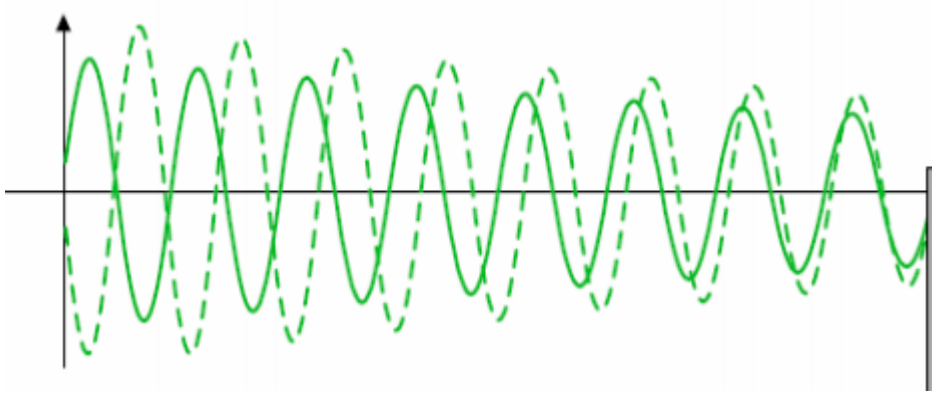
Mod 2
$\{\Phi\}_2$
$f_2 = 5198$ Hz



Mod 3
$\{\Phi\}_3$
$f_2 = 5240$ Hz

4. Prigušenje u MKE

- Prigušenje je mehanizam rasipanja energije koji uzrokuje da se vibracije vremenom smanjuju i na kraju eventualno zaustave.
- Prigušenje se javlja zbog dva razloga:
  - Prvi razlog je pojava histereze - vremensko zaostajanje deformacije u odnosu na naprezanje i pojava disipacije energije usled nelinearnih svojstava materijala.
  - Drugi razlog su visokoelastična svojstva materijala, pri čemu se prigušenje uglavnom javlja na mestima kontakta.
- Kod većine elemenata koji se primenjuju u konstrukcijama vrednost prigušenja je od 0,5% do 7% vrednosti kritičnog prigušenja.
- Vrednost prigušenja može zavisiti od materijala, brzine kretanja i/ili učestaonosti vibracija.



4. Prigušenje u MKE

- Prigušenje se može klasifikovati kao:
  - Viskozno prigušenje (npr. prigušivač, amortizer, itd) ; $F_D = - c v$
  - Prigušenje u materijalu/ histerezisno prigušenje (npr. unutrašnje trenje)
  - Prigušenje usled suvog trenja (npr. trenje klizanjem); $F_D = - i \mu K x$
  - Numeričko (fiktivno) prigušenje (veštačko prigušenje)

4. Prigušenje u MKE – Viskozno prigušenje

- Jednačina kretanja za sistem sa jednim stepenom slobode sa prigušenjem

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = 0$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - Neprigušena sopstvena frekvencija

$c_c = 2\sqrt{k \cdot m} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n}$ - Kritično prigušenje (granica između oscilatornog i neocilatornog ponašanja)

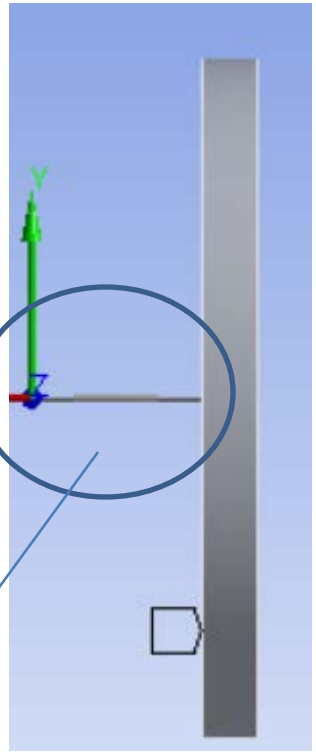
$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$ - Odnos prigušenja (bezdimenzioni koeficijet prigušenja) (odnos između koeficijenta prigušenja u sistemu i kritičnog prigušenja)

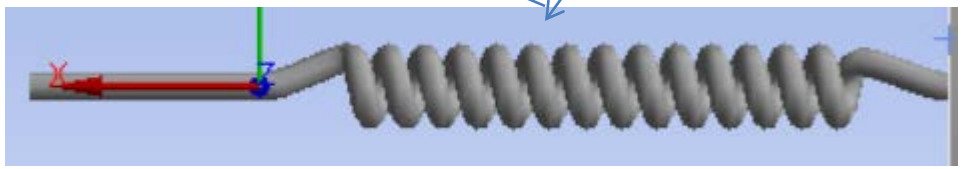
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ - Frekvencija prigušenih oscilacija)

4. Prigušenje u MKE – Viskozno prigušenje

- Vrednost prigušenja ***c*** se može direktno definisati kada se koristi konačni element sa prigušenjem kao što je opruga.
- $c = \xi * c_c$

Type	Longitudinal
Spring Behavior	Both
Longitudinal Stiffness	3. N/m
Longitudinal Damping	14. N·s/m





4. Prigušenje u MKE

- Matrica prigušenja

$$[C] = \alpha [M] + \sum_{i=1}^{N_{ma}} \alpha_i^m [M_i] + \beta [K] + \sum_{j=1}^{N_{mb}} \beta_j^m [K_j]$$

Prigušenje mase

Prigušenje krutosti

- Pretpostavlja se da je prigušenje proporcionalno, odnosno da predstavlja linearnu kombinaciju mase i krutosti.

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

- Kod proporcionalnog prigušenja, prigušenje svakog moda se smatra jednakim.
- α, β - faktori participacije matrice masa i matrice krutosti u matrici prigušenja sistema

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Koeficijenti prigušenja α, β su Rejlijevi koeficijenti prigušenja. Matrica prigušenja se određuje korišćenjem ovih konstanti - multipliciranjem matrice masa i matrice krutosti.

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

- Prigušenje materijala, u formi viskoznog (proporcionalnog) prigušenja, uvodi se primenom faktora participacije mase i krutosti sistema.

- Veza između odnosa prigušenja za *i*-ti sopstevni oblik i faktora participacije matrice masa i matrice krutosti u matrici prigušenja sistema je:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}; \quad i = 1, 2.....n$$

- U mnogim praktičnim strukturnim problemima faktor participacije mase može se zanemariti (α = 0).

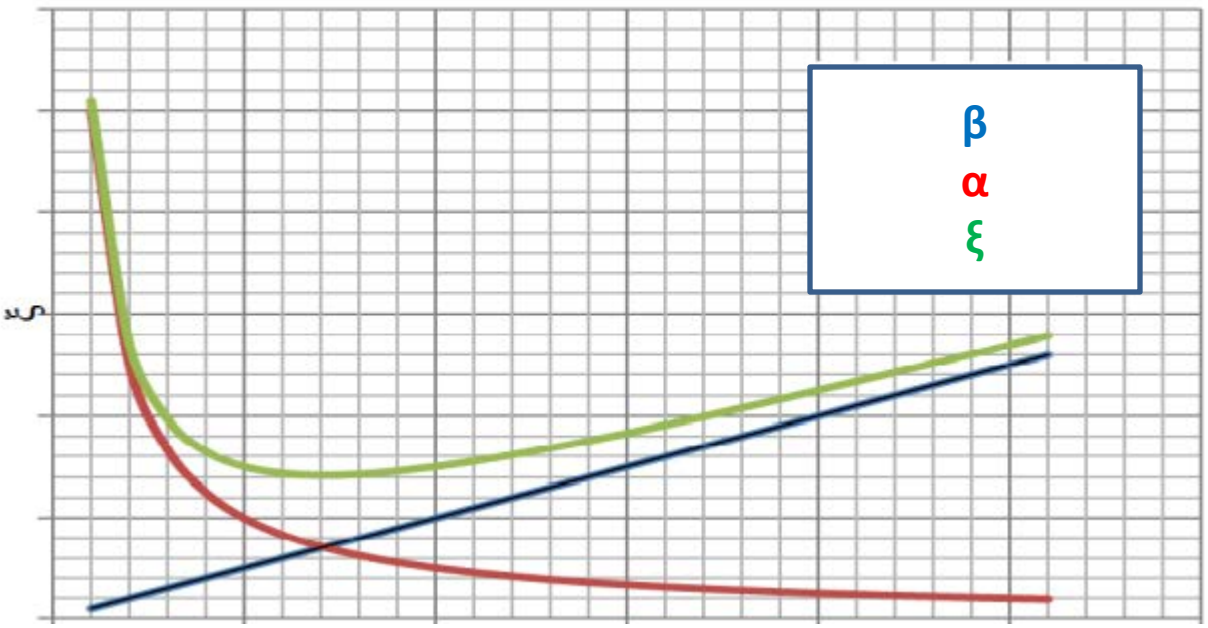
$$\xi_i = \frac{\beta\omega}{2}; \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega}$$

- Za datu vrednost β odnos prigušenja ξ je direktno proporcionalan frekvenciji, tj. niže frekvencije će biti manje prigušene, a veće frekvencije će biti više prigušene.

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Za datu vrednost faktora participacije mase α (β=0) odnos prigušenja ξ je inverzno d proporcionalan frekvenciji, tj. niže frekvencije će biti više prigušene, a veće frekvencije će biti manje prigušene.

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega}; \quad \alpha = 2\xi\omega$$



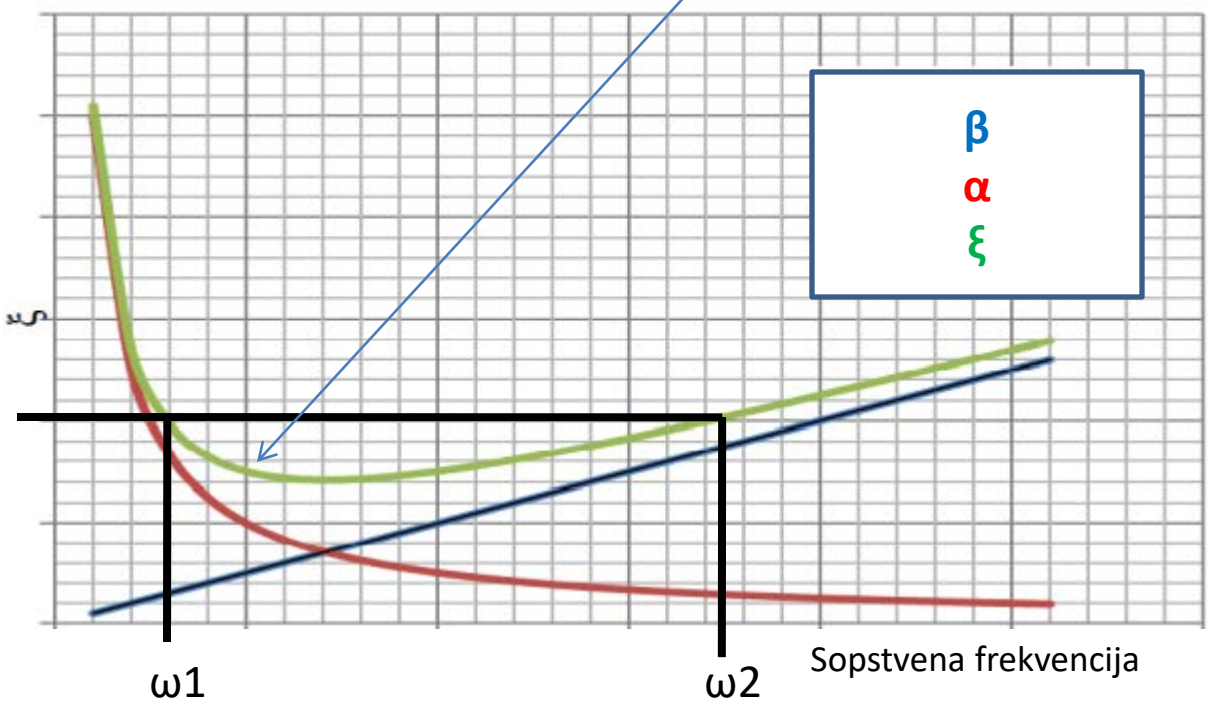
Sopstvena frekvencija

4. Prigušenje u MKE – Prigušenje mase i krutosti

- Ukoliko su odnosi prigušenja jednaki za sve sopstvene oblike vibracija i ako se uzmu u obzir oba faktora participacije onda je:

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}; \qquad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1+\omega_2}$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2} = \xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2} = \xi$$



4. Prigušenje u MKE – Histerezisno prigušenje

- Prigušenje materijala, u formi histerezisnog prigušenja, uvodi se primenom faktora participacije mase i krutosti sistema, analogno principu uvođenja viskoznog prigušenja.
- Ovo prigušenje se uvodi kod analiza u frekventnom domenu, te se u proračunu primenjuje matrica histerezisnog prigušenja.

$$[C] = \frac{2}{\Omega} g [K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi = g$$

koef. strukturnog prigušenja

- Za razliku od viskoznog prigušenja, frekvencija prigušenih oscilacija se ne menja.
- Sila prigušenja je proporcionalna brzini, a obrnuto proporcionalna frekvenciji

5. Modalna analiza sa prigušenjem

- Linearna jednačina kretanja za slobodne prigušene vibracije je:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

- Imagionarni deo sopstvenih vrednosti je sopstvena frekvencija

- Realni deo sopstvenih vrednosti je mera stabilnosti
  - **pozitivno = nestabilno**
  - **negativno = stabilno**

- Frekvencija se često prikazuje u funkciji brzine pomoću Campbel-ovog dijagrama, jer modovi oscilovanja rotirajućih elemenata postaju nestabilni pri većim brzinama.

- Ugaona frekvencija prigušenih oscilacija je

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

ξ → Koeficijent prigušenja

ω_n → Ugaona frekvencija neprigušenih oscilacija

5. Modalna analiza sa prigušenjem

- Vrednosti α, β se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

1 Vrednost prigušenja koja zavisi od materijala

$$[C]=\sum_{i=1}^{N_{ma}}\alpha_i^m[M_i]+\sum_{j=1}^{N_{mb}}\beta_j^m[K_j]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2};\quad i=1,2$$

$$\alpha=\frac{2\omega_i\omega_j\left(\xi_i\omega_j-\xi_j\omega_i\right)}{\omega_j^2-\omega_i^2}$$

$$\beta=\frac{2\left(\xi_j\omega_j-\xi_i\omega_i\right)}{\omega_j^2-\omega_i^2}$$

Definisno u podacima o materijalu

Properties of Outline Row 3: Structural Steel

	A	B
1	Property	Value
2	Density	7850
3	Damping Factor (α)	
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56
5	Damping Factor (β)	
6	k-Matrix Damping Multiplier	0.003
7	Isotropic Elasticity	

Implementacija prigušenja u model podrazumeva da je izvršena modalna analiza neprigušenih oscilacija strukture.

5. Modalna analiza sa prigušenjem

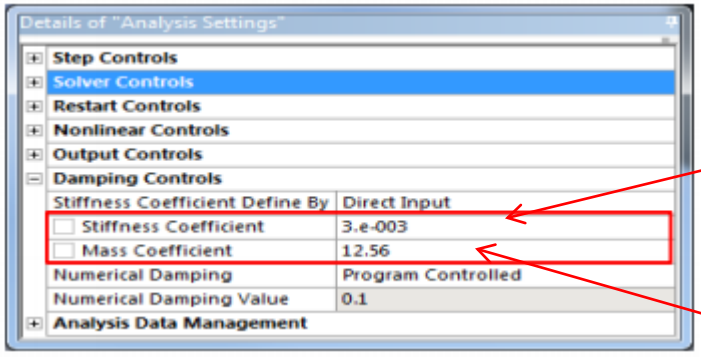
2 Direktno kao opšta vrednost prigušenja

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2} = \xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2} = \xi$$

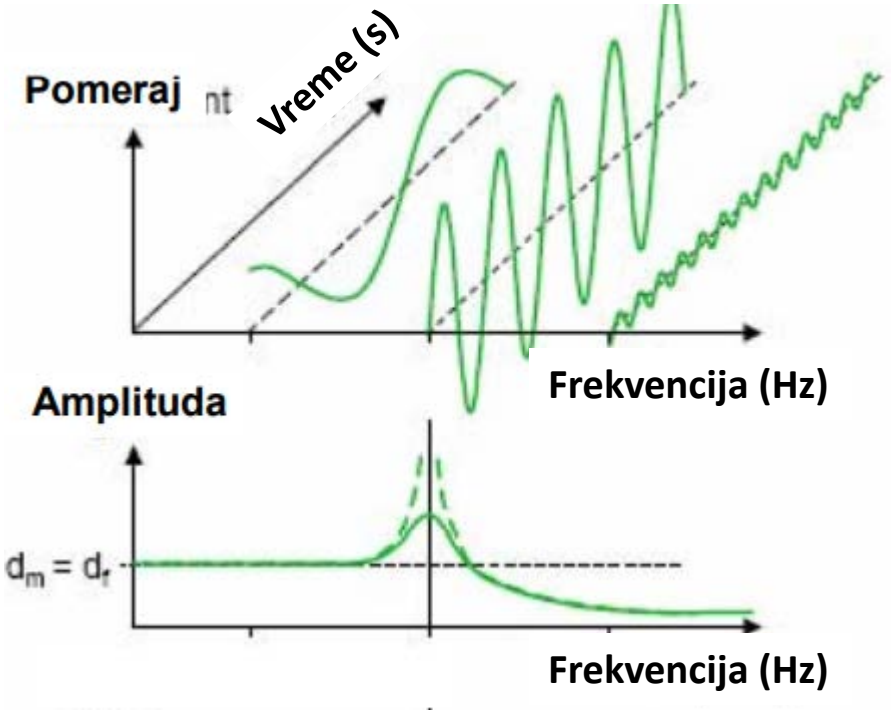
$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}; \qquad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_2}$$



Koeficijenti struturnog prigušenja (ξ) se razmatraju u opsegu, (0,1-0,2%) za čelik

6. Harmonijska analiza

- Koristi se određivanje stacionarnog odziva konstrukcije pod opterećenjem koje se sinusno (harmonijski) menja tokom vremena.
- Ukoliko se na konstrukciju deluje spoljašnjom sinusnom silom, odziv će pratiti silu, - *kretanje konstrukcije ima istu frekvenciju kao i spoljašnja sila.*

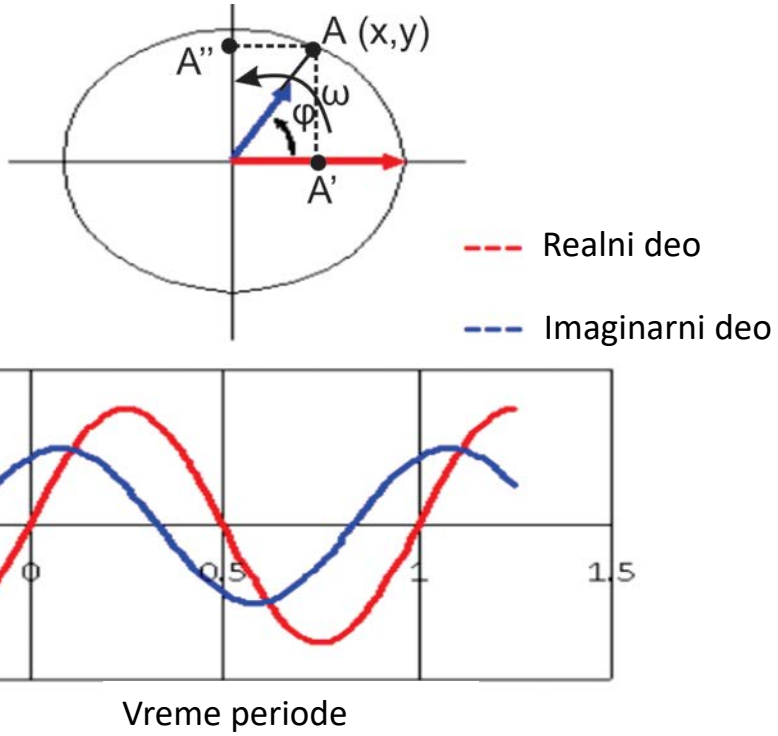


6. Harmonijska analiza

- Sva opterećenja i pomeranja menjaju se sinusoidno na istoj poznatoj frekvenciji (ne nužmo i na fazi)
- Pretpostavlja se da sve izlazne veličine javljaju na istoj frekvenciji.
- Vektor položaja sa *x*-osom gradi ugao: **φ = ωt**. Veličina **φ** se naziva fazni ugao.
- Kretanje tačke **A** se ponavlja periodično nakon **2π** radijana, tako da je: **ω = 2π*f***
- Kod harmonijskog kretanja **ω** je konstantna.

$$F_i = F_i \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A_x \cos\varphi = A_x \cos(\omega t - \varphi_0)$$



6. Harmonijska analiza

- Jednačina kretanja za linearnu strukturu je:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\}$$

- Pretpostavlja se da su {F} i {u} harmonični sa frekvencijom Ω :

$$\{F\}=\left\{F_{\max}e^{i\psi}\right\}e^{i\Omega t}$$

$$\{u\}=\left\{u_{\max}e^{i\psi}\right\}e^{i\Omega t}$$

- Izvodi po vremenu daju pomeranje, brzinu i ubrzanje:

$$\{u\}=\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{u}\}=i\Omega\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{u}\}=-\Omega^2\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)e^{i\Omega t}$$

ω - Izlazna (sopstvena) kružna frekvencija

Ω - Ulazna (prinudna) kružna frekvencija

6. Harmonijska analiza

- Jednačina kretanja za linearnu strukturu je:

$$\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)=\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)$$

- Potpunom harmonijskom analizom odziva (**F**ull **HA**rmonic response **A**nalysis)
  - Rešava sistem simultanih jednačina direktno koristeći solver za statički analizu:

$$\underbrace{\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)}_{[Kc]}\underbrace{\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)}_{\{Uc\}}=\underbrace{\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)}_{\{Fc\}}$$

[Kc] x **{Uc}** = **{Fc}**

- Analiza odziva superpozicije osnovnih modova (**M**ode **SU**perposition response **A**nalysis)
  - Izražava pomeranja kao linearnu kombinaciju modova oscilovanja:

$$\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[C]+[K]\right)\left(\{u_1\}+i\{u_2\}\right)=\left(\{F_1\}+i\{F_2\}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(-\Omega^2+i2\omega_j\Omega\xi_j+\omega_j^2\right)y_{jc}=f_{jc}$$

6. Harmonijska analiza – Potpuna harmonijskom analizom

- Tačna rešenja.
- Generalno posmatrano, potrebno je veće vreme za rešavanje od MSUP-a.
- Podržava sve vrste opterećenja i granične uslove.
- Tačke rešenja mogu biti ravnomerno raspoređene po frekventnom domenu ili nejednako raspoređene na korisnički definisanim lokacijama.
- Vrednosti prigušenja α, β se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

1 Vrednost prigušenja koja zavisi od materijala

$$[C]=\sum_{i=1}^{N_{ma}}\alpha_i^m[M_i]+\sum_{j=1}^{N_{mb}}\left(\beta_j^m+\frac{1}{\Omega}g_j\right)[K_j]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2}+g$$

Properties of Outline Row 3: Structural Steel

	A	B
1	Property	Value
2	Constant Damping Coefficient	0.01
3	Damping Factor (α)	
4	Mass-Matrix Damping Multiplier	12.56
5	Damping Factor (β)	
6	k-Matrix Damping Multiplier	0.003

Definisno u podacima o materijalu

6. Harmonijska analiza – Potpuna harmonijskom analizom

2 Direktno kao opšta vrednost prigušenja

$$[C]=\alpha[M]+\left(\beta+\frac{1}{\Omega}g\right)[K]$$

Ekvivalentno prigušenje

$$\xi_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2}+g=0,005-0,07$$

Details of "Analysis Settings"	
Options	
Rotordynamics Controls	
Output Controls	
Damping Controls	
Structural Damping Coefficient	0. Hz
Stiffness Coefficient Define By	Direct Input
Stiffness Coefficient	0.
Mass Coefficient	0.
Analysis Data Management	

6. Harmonijska analiza – Opterećenje i ograničenje

	Metoda rešavanja	Fazni ulaz	Zavisnost frekvencije
Ubrzanje	FHAA/MSUA	Ne	Da
Pritisak	FHAA/MSUA	Da	Da
Sila	FHAA/MSUA	Da	Da
Moment	FHAA/MSUA	Da	Da
Pomerna sila (Remote force)	FHAA/MSUA	Da	Da
Ležajno opterećenje	FHAA/MSUA	Ne	Ne
Pomeranje	FHAA/MSUA	Da	Da
Pomereno pomeranje (Remote displacement)	FHAA	Da	Ne

Pomeranje kao opterećenje se može primeniti u MSUA kao osnovna pobuda primenjena na fiksne oslonce ili na opruge tipa "Body-Ground".

6. Harmonijska analiza – Opterećenje i ograničenje

Specifična harmonijska opterećenja zahtevaju:

- Amplitudu *Fimax* ili relani deo
- Fazni ugao φ ili imaginarni deo
- Frekvenciju ω

$$F_i = F_{i\max} \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

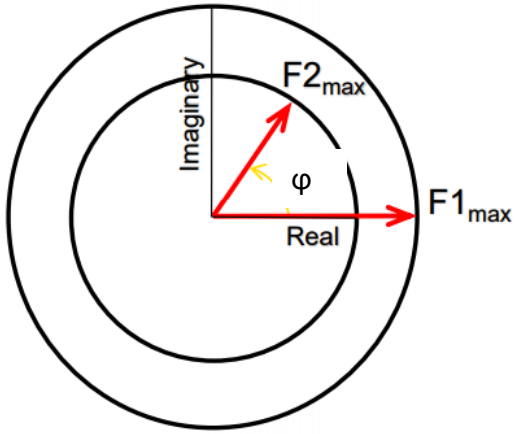
- Vrednost opterećenja (veličina) predstavlja amplitudu (F1 i F2).
- Fazni ugao φ je fazni pomak između dva ili više harmonijskih opterećenja.
- Fazni ugao φ nije potrebno ako je prisutno samo jedno opterećenje.
- Realni i imaginarni deo:

$$F_{1Real.} = F_{1\max} \cos\left(0^\circ\right) = F_{1\max}$$

$$F_{1Imag.} = F_{1\max} \sin\left(0^\circ\right) = 0$$

$$F_{2r\,Real.} = F_{2\max} \cos\left(\varphi\right)$$

$$F_{2r\,Imag.} = F_{2\max} \sin\left(\varphi\right)$$



6. Harmonijska analiza – Analiza superpozicije modova

- Približno rešenje - tačnost zavisi od toga da li je izvučen odgovarajući broj modova.
- Generalno brže od potpune analize.
- Tačke rešenja mogu biti podjednako raspoređene po frekventnom domenu, grupisane oko sopstvenih frekvencija strukture ili definisane od korisnika.
- Rešava nevezani sistem jednačina izvođenjem linearne kombinacije normalnih vektora (oblika oscilovanja).
- Modovi oscilovanja su poznati kao generalizovane koordinate i u ovom slučaju y_1 i y_2 su stepeni slobode
- Vrednosti prigušenja se kao ulazne veličine mogu definisati kao:

$$\xi_i^d = \xi + \xi_i^m + \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

Damping Controls	
Constant Damping Ratio	0.
Stiffness Coefficient Define By	Direct Input
Stiffness Coefficient	0.
Mass Coefficient	0.
Numerical Damping	Program Controlled

β

α